EINFÜHRUNG

IN DIE

MAXWELL'SCHE THEORIE

DER

ELEKTRICITÄT.

MIT EINEM EINLEITENDEN ABSCHNITTE

ÜBER DAS

RECHNEN MIT VECTORGRÖSSEN IN DER PHYSIK.

VON

DR. A. FÖPPL,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1894.

Vorwort.

Der Kreis der überzeugten Anhänger der Maxwell'schen Elektricitätslehre setzte sich bis vor einigen Jahren fast ausschliesslich aus englischen Physikern zusammen. Schon früher schenkte man zwar auch auf deutschem Boden dieser Theorie grosse Beachtung; man war aber noch zu sehr in dem Banne der Fernwirkungslehre befangen, um sich vollständig in sie einleben zu können. Anfänglich richteten sich daher die Bestrebungen unserer Physiker vorwiegend dahin, eine Versöhnung beider Theorien herbeizuführen und womöglich ein allgemeines Schema aufzustellen, das beide als Specialfälle in sich fasste. Eine andere Folge davon war, dass man sich zuerst und am meisten mit jener Seite der Maxwell'schen Lehre befreundete, die von der Ableitung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes aus den allgemeinen Principien der Mechanik handelt. Denn der Ideengang, der dieser zu Grunde liegt, ist seinem Wesen nach eng verwandt mit den älteren Untersuchungsmethoden, bei denen der Potentialbegriff die entscheidende Rolle spielte.

Alle Bemühungen, die Faraday-Maxwell'sche Anschauung in den früheren Vorstellungskreis einzugliedern, ohne von diesem erhebliche Opfer zu bringen, mussten indessen in letzter Linie an den Verschiebungsströmen im freien Aether und an der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen scheitern. Kaum hatte daher Hertz diese Folgerung der Maxwell'schen Theorie durch seine entscheidenden Versuche bestätigt, als er sich sofort dieser grundsätzlich zuwandte, nachdem er sich schon früher sehr mit ihr befreundet hatte.

Damit war der Wendepunkt gekommen. Heute denkt man kaum noch daran, in der Richtung des Weber'schen Elementargesetzes weiter zu arbeiten, dessen Formulirung einst den Höhepunkt der Entwickelung der älteren Vorstellungen gebildet hatte. Nachdem sich schon auf Grund der älteren Theorie die Unhaltbarkeit dieses Gesetzes definitiv herausgestellt hatte und sich kein Ersatz dafür finden liess, war die Leistungsfähigkeit der Fernwirkungstheorie erschöpft und ihre Unzulänglichkeit trat immer mehr zu Tage. Dadurch war der Boden für die Aufnahme einer grundsätzlich von jener verschiedenen Lehre wohl vorbereitet und unter dem Eindrucke der Hertz'schen Entdeckungen konnte sich der Umschwung der Meinungen daher mit ungewöhnlicher Schnelligkeit vollziehen.

So kam es, dass man heute der Maxwell'schen Lehre überall das lebhafteste Interesse entgegen bringt. Nicht nur der Physiker von Fach, der Lehrer und der Studirende der Physik, sondern namentlich auch der wissenschaftlich gebildete Elektrotechniker sucht sich mit den Grundzügen dieser Theorie bekannt zu machen, in der man heute mit grosser Wahrscheinlichkeit die bleibende Grundlage jeder physikalischen Forschung auf diesem Gebiete erblicken darf.

Hiermit entstand auch das Bedürfniss nach einer möglichst allgemein verständlichen, dabei aber doch wissenschaftlich strengen Darstellung der Maxwell'schen Theorie. Denn das Maxwell'sche Originalwerk, das als Hauptquelle zur Verfügung stand, stellt nicht nur ziemlich hohe Anforderungen an die mathematische Vorbildung und vielfach auch an die Geduld des Lesers, sondern es enthält, wie ja den Umständen nach gar nicht anders zu erwarten, auch manche Irrthümer, die inzwischen berichtigt sind, und es schlägt viele Umwege ein, die seitdem abgekürzt wurden.

Eine solche Bearbeitung hat Boltzman in den von ihm herausgegebenen Vorlesungen geliefert. Ich glaube aber nicht, dass dadurch eine anderweitige Behandlung des Gegenstandes entbehrlich gemacht wurde, obschon sich jenem Buche in seiner Art kaum etwas Besseres zur Seite stellen lassen wird.

Denn dieser Physiker hat, wenigstens in dem zur Einführung des Lesers bestimmten ersten Bande, sein Hauptaugenmerk auf die Ableitung der Gleichungssysteme des Feldes aus der Theorie der Cykeln gerichtet. Für den Anfänger scheint es mir aber nicht so sehr auf den Nachweis anzukommen, dass sich die Maxwell'sche Theorie als Folgerung aus einem höheren Principe ableiten lässt, sondern ich halte es für viel wichtiger, ihm eine möglichst unmittelbare und deutliche Vorstellung von den Begriffen und Auffassungen dieser Theorie zu geben, um ihn zu einem selbstständigen Arbeiten damit zu befähigen. Und ich bin ferner der Ansicht, dass die mechanischen Analogien der Cyklentheorie dieses Ziel nicht so bequem erreichen lassen, als der Weg, den ich hier eingeschlagen habe.

Bei der Bearbeitung dieses Buches liess ich mich von jenem praktischen Beweggrunde in erster Linie leiten. Ich vermied es überall, die Energiebeziehungen zur Ableitung der Grundgesetze heranzuziehen, sondern stützte diese, soweit es irgend anging, unmittelbar auf die Erfahrungsthatsachen. Natürlich versäumte ich nicht, nachträglich den Nachweis zu liefern, dass das Energieprincip nun auch thatsächlich erfüllt wird. So habe ich auch die von Boltzmann vorangestellte Herleitung der Feldgleichungen aus den mechanischen Principien nur im letzten Abschnitte kurz berührt und ich hoffe, dem Leser die Einarbeitung in das ihm noch fremde Gebiet durch diese Anordnung erheblich erleichtert zu haben. Für die ausführlichere Darstellung dieser gleichwohl sehr wichtigen Betrachtungen verweise ich den Leser auf jenes vortreffliche Buch, behalte mir aber auch selbst noch vor, später ausführlicher darauf zurückzukommen.

An mathematischen Vorkenntnissen setzte ich bei dem Leser, um mich an einen möglichst weiten Kreis wenden zu können, nur die sichere Beherrschung der Anfangsgründe der Differential- und Integral-Rechnung voraus. Ich hoffe mit Zuversicht, dass meine Darstellung keinem Leser, der mit diesen genügend vertraut ist, besondere Schwierigkeiten bereiten wird. Bei der mathematischen Fassung der vorgetragenen Lehren habe ich mich allerdings überall der Bezeichnungen und Methoden des Vectorcalcüls bedient; im ersten Abschnitte sind diese aber, soweit als sie gebraucht werden, in sehr einfacher und, wie ich unbedingt annehmen darf, auch sehr leicht verständlicher Weise erörtert.

Ich empfehle dem Leser, zunächst den ersten Abschnitt durchzusehen: er wird dort Vieles finden, was ihm ohne Weiteres vollkommen klar ist. Ueber das Andere möge er zunächst hinweggehen und sofort mit dem Studium der folgenden Abschnitte beginnen. Bei Gelegenheit der Rückverweisungen auf die im ersten Abschnitte entwickelten Rechengesetze wird er dann schon von selbst darauf geführt werden, die vorher überschlagenen Entwickelungen aufs Neue in Erwägung zu ziehen und an der Hand der concreten Anwendungen, die davon gemacht werden sollen, wird er sich mit weit leichterer Mühe darin zurecht finden, als wenn die mathematischen Lehren losgelöst von diesen bewältigt werden müssten.

Im Uebrigen habe ich es mir zur Aufgabe gemacht, eine grössere Häufung von Formeln (abgesehen natürlich von der mathematischen Einleitung) thunlichst zu vermeiden und lieber mehr Text zur Wiedergabe meines Gedankenganges zu verwenden. Dieses Bestreben hat natürlich seine Grenzen, die durch die Rücksicht auf den präcisen Ausdruck gesteckt sind. Es wird aber ganz besonders unterstützt durch den Gebrauch der Vectoren-Gleichungen, die in ihrer einfachen Gliederung fast wie abgekürzte Sätze des Textes gelesen werden können.

In der That gewinnt die Behandlung der Elektricitätslehre so ungemein an Klarheit und Durchsichtigkeit durch die Einführung der Vectorgrössen selbst an Stelle ihrer Componenten, dass es im Ganzen entschieden weniger Anstrengung erfordern dürfte, sich zuerst mit den wenigen Rechengesetzen, um die es sich dabei handelt, vertraut zu machen und dann noch die Elektricitätslehre durchzunehmen, als wenn man diese allein mit Hülfe der gewohnten Cartesischen Darstellungsmethode studirt. Die auf das Studium der Vector-Analysis zu verwendende Mühe wird daher sofort durch einen entsprechenden Gewinn reichlich belohnt und ausserdem erzielt man damit den dauernden Vortheil, sich mit jener analytischen Darstellungsform geometrischer Beziehungen vertraut zu machen, die zweifellos die mathematische Zeichensprache der Physik der Zukunft sein wird.

Bei der Herausgabe dieses Buches befand ich mich in einer ähnlichen Lage, wie etwa Weisbach, als seine Mechanik zum ersten Male erschien. Damals wusste man in den technischen Kreisen, für die sein Buch bestimmt war, noch wenig von der Differentialrechnung und er zog es vor, lieber einen einleitenden Abschnitt darüber vorauszuschicken, als auf deren Anwendung zu verzichten oder sich nur an solche Leser zu wenden, die schon damit vertraut waren. Heute ist dies nicht mehr nöthig; hoffentlich dauert es aber nicht mehr gar zu lange, bis auch ein solcher einleitender Abschnitt über die Rechnung mit Vectoren ebenso entbehrlich wird, und zwar auch bei uns in Deutschland, während es in England heute schon so ist. Das Land, das einen Grassmann hervorbrachte, sollte gegen das Geburtsland Hamilton's mit der Einführung dieser wichtigen Verbesserung in den mathematischen Hülfsmitteln der theoretischen Physik nicht länger zurückstehen.

Am engsten schloss ich mich bei der Darstellung des Rechnens mit Vectoren, wie in vielen anderen Punkten, an das von O. Heaviside in seinen Abhandlungen, die vor Kurzem auch gesammelt im Buchhandel erschienen sind, gegebene Muster an. Von den Arbeiten dieses Meisters ist meine Darstellung überhaupt mehr beeinflusst als von denen irgend eines anderen Physikers, mit Ausnahme von Maxwell selbst natürlich. Ich halte Heaviside für den hervorragendsten Nachfolger Maxwell's nach der speculativ-kritischen Seite hin, wie es der uns leider so früh entrissene Hertz zweifellos nach der experimentell-bestätigenden Seite hin war.

Quellenangaben habe ich in diesem Buche grundsätzlich fortgelassen. Man wird mir daraus vielleicht einen Vorwurf machen, den ich bei einem wissenschaftlichen Werke im Allgemeinen auch als sehr berechtigt anerkennen muss. Ich hatte aber meine guten Gründe zu diesem Verfahren und ich hoffe, dass mich ihre Darlegung in den Augen aller billig Denkenden rechtfertigen wird. Ich wollte kein Handbuch, sondern ein Lehrbuch schreiben, das möglichst aus einem Gusse sein sollte. Deshalb vermied ich es so viel als irgend thunlich, während der Bearbeitung die von mir früher gelesenen Schriften nachzuschlagen, um mich nicht unmittelbar von ihnen beeinflussen zu lassen. Von den Entwickelungen und den Ergebnissen anderer Autoren wollte ich mich nur so weit leiten lassen, als sie sich meinem Gedächtnisse fest eingeprägt und sich mit meinen eigenen Anschauungen innig verschmolzen hatten. Auf diese Art hoffte ich zu einer einheitlicheren und in sich besser gefügten Darstellung des ganzen Systems zu gelangen, als es im anderen Falle möglich gewesen wäre.

Nach Beendigung der Arbeit schien es mir aber undurchführbar, nachträglich genaue Rechenschaft darüber abzulegen, woher jeder einzelne Gedanke, den ich benutzte, ursprünglich stammte. Selbst über den Antheil, den ich für mich selbst in Anspruch nehmen darf, bin ich an vielen Stellen im Zweifel. Ich verzichte aber von vornherein gern auf die Erhebung aller Prioritätsansprüche und begnüge mich damit, nur auf die Darstellungsform Urheberrechte geltend zu machen. Eine Ausnahme davon bitte ich nur in Bezug auf die Behandlung der mit der magnetischen Härte zusammenhängenden Erscheinungen machen zu dürfen, bei der ich kaum aus fremden Quellen schöpfte.

Lehrbüchern von solcher Tendenz hat man übrigens von jeher gestattet, von der fortlaufenden Bezugnahme auf die Originalarbeiten abzusehen, während man sie für ein Handbuch mit Recht als unerlässlich ansieht. Möge daher der Leser diesen Mangel, wenn er ihn als solchen empfindet, mit Nachsicht beurtheilen.

Mit vollem Rechte hat Boltzmann die Physiker aufgefordert, beim Anschreiben der Formeln sich möglichst der ursprünglichen Bezeichnungen Maxwell's zu bedienen, weil das

Studium sehr dadurch erleichtert wird, wenn man von vornherein überall bekannte Symbole vorfindet. So weit es sich um die Bezeichnung der Vectorgrössen selbst handelt, bin ich ihm auch gefolgt; für die Componenten habe ich aber überall dieselben Buchstaben, wie für die Vectoren gewählt (nur in anderer Schrift und mit entsprechenden Abzeichen), weil die Zahl der Zeichen, deren Bedeutung man sich zu merken hat, dadurch ganz erheblich vermindert wird. Ich suchte hierbei die Interessen der Anfänger wahrzunehmen, ohne die der schon Erfahrenen zu verletzen.

Neuerdings bedienen sich die englischen Physiker, nach dem Vorgange von Heaviside, mit grossem Vortheile fetter Lettern zur Kennzeichnung der Vectorgrössen. Ich nahm diesen wichtigen Vortheil gleichfalls wahr, bediente mich aber ausserdem, so wie Maxwell selbst, der Fracturbuchstaben für die Vectoren. Ich halte es für einen Nachtheil, dass man in England hiervon abgegangen ist, weil dieses Kennzeichen auch in der Handschrift bestehen bleibt, in der man mit fetten Lettern u. dgl. nicht operiren kann.

Für die Kennzeichnung des Vectorproducts liess die Verlagsbuchhandlung mit dankenswerther Bereitwilligkeit das Operationszeichen V herstellen, das sich von dem in der Potentialtheorie oft gebrauchten gewöhnlichen Buchstaben V deutlich unterscheidet, so dass jedes Missverständniss ausgeschlossen ist.

Alle Betrachtungen, die mir schwieriger und dabei für die erste Einführung in die Theorie entbehrlich zu sein schienen, habe ich aus diesem Buche fortgelassen. Wenn sich die Erwartungen erfüllen, die ich an die Herausgabe des Buches knüpfe, wenn es also namentlich in weiteren Kreisen Verbreitung und Absatz und wenn ferner die von mir gewählte Behandlung den erhofften Beifall findet, beabsichtige ich, diesem Bande einen zweiten folgen zu lassen, der jene schwierigeren Theile behandeln soll. Es würde sich dabei nach meinem jetzigen Plane namentlich um die Behandlung der Vectorfunctionen (als Ergänzung des ersten Abschnitts) und der äolotropen Körper und um die tiefer eindringende Darstellung der Elektrodynamik bewegter Leiter und der hier im letzten Abschnitte nur ganz kurz zusammengefassten Lehren (namentlich der elektromagnetischen Wellen) handeln.

Vor 11 Jahren kam ich, nachdem ich mich bis dahin ausschliesslich mit den technischen Wissenschaften beschäftigt hatte, zu Herrn Geheimrath Prof. Dr. G. Wiedemann mit dem Entschlusse, die Elektricitätslehre eingehend zu studieren und erbat mir seinen Rath über den dabei innezuhaltenden Plan. Dieser hervorragende Forscher, der mir seit jenem Tage ein überaus wohlwollender Lehrer, Förderer und Gönner war, wies mich schon bei meinem ersten Besuche u. A. lebhaft auf die Maxwell'schen Arbeiten hin. Zunächst freilich folgte ich ihm hierin nicht, es drängte mich mehr, in die Meisterarbeiten der deutschen Schule einzudringen, und erst nachdem ich hierbei die Ueberzeugung gewonnen hatte, dass auf diesem Wege kaum noch ein durchschlagender Fortschritt erhofft werden könne, war ich der Lehre des grossen Briten zugänglicher geworden.

Dass ich mich schliesslich noch zur Bearbeitung dieses Buches entschloss, ist ganz wesentlich auf die Anregungen zurückzuführen, die mir im fortlaufenden Verkehre mit jenem bedeutenden Gelehrten, der mein Interesse der Maxwell'schen Theorie stets von Neuem wieder zulenkte, in reichem Maasse zu Theil wurden. Es möge mir daher gestattet sein, Herrn G. Wiedemann auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank für das Interesse auszusprechen, das er von Anfang an an mir und meinen Arbeiten nahm und das er oft genug durch die That zum Ausdrucke brachte.

Der Verlagshandlung spreche ich meinen Dank und meine Anerkennung für die sorgfältige und gefällige Herstellung des Druckes aus. Schon in ihrem Interesse wünsche ich diesem Buche neben dem wissenschaftlichen — an dem mir natürlich am meisten gelegen ist — auch einen geschäftlichen Erfolg.

Leipzig, im April 1894.

A. Föppl.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Die Mechanik der elektrischen und magnetischen Erscheinungen gründete sich bis zum Auftreten Maxwell's auf die Vorstellung von Fernwirkungen zwischen elektrisirten, magnetisirten oder von elektrischen Strömen durchflossenen Körpern. Nur die Anschauungen Faraday's wichen in dieser Hinsicht von denen aller anderen Physiker ab. Faraday war aber nicht genug Mathematiker, um seiner Auffassung eine nach allen Seiten erschöpfende und widerspruchsfreie Form zu geben, die sie zu dem Range einer Theorie erhoben hätte; obschon auch seine Art, die elektrischen Erscheinungen aufzufassen und zu beschreiben, wie Maxwell bemerkt, eine mathematische war, ohne dafs er sich der gewöhnlichen mathematischen Zeichensprache bedient hätte. Erst Maxwell gelang dies und er schuf, indem er die Ideen Faraday's in strenge mathematische Formen brachte, ein Lehrgebäude, das schon in der Anlage von den Fernwirkungstheorien wesentlich verschieden war, bei seinem weiteren Ausbau aber sich immer weiter von diesen entfernte.

Die Fernwirkungstheorien wurden namentlich von deutschen Gelehrten (es genügt, hier die Namen von W. Weber, H. von Helmholtz, der beiden Neumann und G. Kirchhoff zu nennen) auf eine hohe Stufe der Vollendung gebracht. In den Hörsälen der deutschen Hochschulen haben sie daher bis vor Kurzem fast unbestritten das Feld behauptet. Seit den Hertz'schen Entdeckungen, die den evidenten Nachweis erbrachten, dass sich in der That im Dielectricum (und auch, was wesentlich ist, in der Luft oder im Vacuum) elektromagnetische Vorgänge abspielen, ist dies aber anders geworden. Selbst in Deutschland hat sich, wie es scheint, die Mehrzahl der Physiker seitdem der Maxwell'schen Theorie zugewendet.

Das ist nicht so zu verstehen, als wenn diese Theorie in allen Stücken die wäre, die Maxwell selbst in seinem berühmten „treatise“ entwickelte. Sie ist inzwischen nach manchen Seiten hin von seinen Nachfolgern, aber ihrem ursprünglichen Geiste gemäss, weiter ausgebildet worden, ohne desshalb, da die Grundlinien dieselben blieben, eine wesentlich andere geworden zu sein. Mit Rücksicht auf diese Unterschiede in ihrer heutigen Fassung ist es wünschenswerth, von vornherein die Hauptzüge der Maxwell'schen Lehre festzustellen und dabei hervorzuheben, was von ihnen wirklich wesentlich ist. Denn auch von den Hauptzügen, die der ursprünglichen Lehre Maxwell's ihr Gepräge gaben, sind nicht alle wesentliche Erfordernisse des ganzen Systems. Man kann einzelne fortlassen oder ändern, ohne desshalb den Zusammenhang in allen übrigen Theilen zu lösen. Wenn die wesentlichen Grundlagen der Maxwell'schen Theorie überall unbestritten angenommen sein werden, wie dies vielleicht von einer gar nicht fernen Zukunft zu erwarten ist, wird diese Theorie einfach die „Theorie der Elektricität“ schlechtweg genannt werden und man wird dann den Namen Maxwell's nur noch mit jener Darstellung verbinden, die er selbst ihr gegeben hat. Solange indessen die Fernwirkungstheorien noch ihre Vertreter und Vertheidiger finden, ist es nöthig, zum Unterschiede von jenen mit dem Namen Maxwell's auch jede auf seinen Arbeiten aufgebaute Theorie zu bezeichnen. So ist es auch zu verstehen, wenn ich diese Schrift als eine Einführung in die Maxwell'sche Theorie bezeichne.

Als wesentliche Kennzeichen der Maxwell'schen Lehre in ihrer heutigen Fassung sehe ich die folgenden Vorstellungen an:

1) Die Vorstellung, dass alle elektrischen und magnetischen Einwirkungen eines Körpers auf einen von ihm entfernten

anderen, durch die Vermittelung eines Mediums (im Vacuum durch die des Aethers) erfolgen,

2) dass jedes Dielectricum, auch der Aether im Vacuum, in einen später noch näher zu definirenden Zwangszustand von elastischer Art versetzt wird, wenn magnetische oder elektrische Kräfte in ihm auftreten und dass damit eine Anhäufung von Energie verbunden ist,

3) dass die elektrische Strömung unter allen Umständen nur in geschlossenen Bahnen auftreten kann, dass sie aber nicht auf Leiter beschränkt ist, sondern dass auch die bei der Aenderung des Zwangszustandes im elektrischen Felde nach 2) entstehenden elastischen Verschiebungen mit zur Strömung zu rechnen sind,

4) dass auch der Sitz der Energie bei rein elektrostatischen Feldern ausschliesslich, bei den anderen vorwiegend im umgebenden Mittel zu suchen ist,

5) dass die magnetischen Kraftlinien stets geschlossene Linien bilden, oder mit anderen Worten, dass nirgends wahrer Magnetismus auftreten kann.

Hierzu kommen die durch die beiden später vorzuführenden Fundamentalgleichungen ausgesprochenen Wechselbeziehungen zwischen den elektrischen und den magnetischen Grössen.

Eine wichtige Rolle spielen in der Maxwell'schen Theorie ausserdem noch, ohne jedoch wie die vorigen unerlässlich zu sein, die folgenden Punkte:

6) Die Ableitung der elektromagnetischen Gleichungen unmittelbar aus den Grundgesetzen der Mechanik, mit Hülfe der Gleichungen von Lagrange, oder anstatt derer des Princips der kleinsten Wirkungen, des Hamilton'schen Princips u. s. w.,

7) die speciellere Ableitung des Spannungszustandes des Mediums beim elektrischen oder magnetischen Zwange,

8) die Auffassung des Lichtes als einer elektromagnetischen Wellenerscheinung im Aether,

9) die Darstellung der mathematischen Beziehungen durch Gleichungen, in denen Vectoren auftreten.

Diese Liste stelle ich übrigens mit dem Vorbehalte auf, dass sie leicht in dem einen oder anderen Punkte beanstandet werden kann, da sie nur das Ergebniss einer Abschätzung bildet, bei der verschiedene Meinungen nicht ausgeschlossen sind. Namentlich bezieht sich dies auf die vier letzten Punkte, von denen der eine oder andere (besonders der achte) von vielen Physikern lieber zur ersten Gruppe der wesentlichen Bestandtheile der Theorie gerechnet werden wird.

Der zuletzt angeführte Punkt bezieht sich in gewissem Sinne nur auf eine Aeusserlichkeit; trotzdem glaube ich ihm eine grosse Bedeutung beimessen zu müssen. Maxwell selbst hat die Darstellung der Gleichungen nach der Quaternionentheorie nur mehr nebenbei gegeben; in der Hauptsache bediente er sich der Cartesischen Darstellungsweise. In dieser lässt sich aber weit schwieriger eine Uebersicht über den Zusammenhang aller Formeln gewinnen. Aus eigener Erfahrung weiss ich, wie sehr diese erleichtert wird, sobald man sich der Algebra der Vectoren bedient. Die Mühe, die es kostet, sich mit dieser vertraut zu machen, wird durch die Vortheile, die sich daraus ergeben reichlich aufgewogen. Es ist in der That die einzige Methode, die sich den Erfordernissen der Aufgabe willig anpasst, wenn es sich darum handelt, die Faraday'sche Idee des Kraftflusses möglichst getreu mathematisch wiederzugeben. Desshalb stelle ich hier eine Auseinandersetzung über die Grundregeln der Vector-Algebra voran, indem ich mich dabei an das von O. Heaviside in mehreren seiner Arbeiten gegebene Muster anlehne. In der Folge werde ich mich dann stets grundsätzlich dieser Darstellungsmethode bedienen, die auch in manchen anderen Gebieten der Physik, besonders in der Hydromechanik und der Elasticitätslehre mit grossem Vortheile angewendet werden kann.

Erster Abschnitt.

Die Algebra und Analysis der Vectoren.

Erstes Capitel.

Die elementaren Operationen.

§ 1. Definition des Vectors.

Ein Vector ist eine Grösse, der eine Richtung im Raume zukommt. Viele, ja fast die meisten der in der Physik vorkommenden Grössen sind Vectoren, so namentlich die Kräfte, die Geschwindigkeiten, die Beschleunigungen; andere wie die Temperatur, die Masse, die Energie in allen ihren Abstufungen besitzen keine Richtung im Raume. Diese werden im Gegensatze zu jenen Scalaren genannt.

Zwei Vectoren unter sich oder zwei Scalaren unter sich sind desshalb noch nicht Grössen gleicher Art; es kommt dabei auch auf ihre physikalischen Dimensionen an, wie schon aus den angeführten Beispielen deutlich genug hervorgeht. Ein Vector und ein Scalar sind dagegen niemals Grössen derselben Art; eine Summe aus einem Vector und einem Scalar hat daher niemals eine physikalische Bedeutung.

Der einfachste Scalar ist eine absolute Zahl; alle Scalaren lassen sich in diesem einfachsten Scalar, also durch gewöhnliche algebraische Grössen ausdrücken, indem man eine Festsetzung über die zu Grunde gelegten Maasseinheiten und hiermit auch über die physikalischen Dimensionen der auszudrückenden Grösse hinzufügt. Der einfachste Vector ist dagegen eine Strecke, der man eine bestimmte, etwa durch

Beisetzung eines Pfeiles zu bezeichnende Richtung beilegt. Wie die Scalaren durch Zahlen, so lassen sich die Vectoren stets durch Strecken zur Darstellung bringen, indem man ebenfalls einen Maassstab, nach dem die Strecken auszumessen sind, hinzufügt.

Auf die Lage der Strecken im Raume kommt in der Algebra der Vectoren nichts an: zwei parallele und gleichgerichtete Strecken von gleicher Grösse gelten in jeder Hinsicht als gleich.

Die gewöhnliche Algebra beschäftigt sich nur mit scalaren Grössen. Will man mit ihrer Hülfe eine Aufgabe lösen, in der Vectoren vorkommen, so kann dies dadurch geschehen, dass man jeden Vector durch 3 scalare Grössen, etwa durch seine Componenten nach drei Coordinatenachsen, oder durch seine Grösse ohne Berücksichtigung der Richtung und zwei Richtungswinkel wiedergibt. Um eine Beziehung anzugeben, muss man dann 3 Gleichungen anschreiben, während eine einzige genügt, wenn man mit den Vectoren unmittelbar rechnet.

Sieht man bei einem Vector von seiner Richtung ganz ab und begnügt sich damit, nur seine Grösse anzugeben, so nennt man diese den Tensor des Vectors; der Tensor ist demnach stets eine scalare Grösse.

Zur Kennzeichnung der Vectoren sind in dieser Schrift ein- für allemal gothische Buchstaben angewendet, während die lateinischen oder griechischen Lettern wie gewöhnlich zur Bezeichnung von Scalaren dienen, so bezeichnet $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{a}$ einen Vector und A oder a seinen Tensor.

Die Darstellung irgend eines Vectors, z. B. einer Kraft, durch eine gerichtete Strecke (wobei ein bestimmter „Kräftemaassstab“ zu Grunde zu legen ist), lässt sich algebraisch durch die Formel wiedergeben

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a} \cdot A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die als die Definition der Zerlegung eines Vectors $\mathfrak{A}$ in einen Scalar A (der für $\mathfrak{a} = 1$ zum Tensor wird), und einen zweiten Vector $\mathfrak{a}$ anzusehen ist.

Diese Zerlegung nach Gleichung (1) kann übrigens in verschiedener Weise erfolgen. Macht man $\mathfrak{a}$ gleich der Maasseinheit, nach der die Vectoren $\mathfrak{A}$ auszumessen sind, z. B. gleich 1 Dyn in der betreffenden Richtung, wenn es sich um Kräfte handelt, so wird der Tensor A durch eine absolute Zahl ausgedrückt. Anstatt dessen kann man aber auch dem Tensor A eine physikalische Dimension beilegen. In diesem Falle ist der Vector $\mathfrak{a}$ nicht von gleicher Art mit dem Vector $\mathfrak{A}$. Bedeutet z. B. $\mathfrak{A}$ eine Geschwindigkeit, so hat es die Dimension cm/sec; man kann dann $\mathfrak{a}$ als gerichtete Strecke wählen, so dass es die Dimension cm hat, während für A die scalare Dimension $\sec^{-1}$ übrig bleibt.*) Dabei hat man bei einer solchen Zerlegung immer noch die Wahl frei, ob man $\mathfrak{a}$ gleich der Längeneinheit machen will, wobei A den Tensor für die gewählte Zerlegung vorstellt, oder ob man die Grösse des Vectors $\mathfrak{A}$ ebenfalls durch $\mathfrak{a}$ zur Darstellung bringen soll. Im letzten Falle hat der Scalar A nur noch die Bedeutung eines Maassstabverhältnisses, das bei der Darstellung der Vectoren von der Art $\mathfrak{A}$ durch gerichtete Strecken $\mathfrak{a}$ zu Grunde gelegt wird. Diese Art der Zerlegung ist namentlich bei der zeichnerischen Behandlung von statischen Aufgaben (in der Graphostatik) allgemein im Gebrauche. In der Algebra der Vectoren zieht man aber gewöhnlich die vorhergehende vor (so dass also $\mathfrak{a} = 1$ ist), ohne dass jedoch zwischen beiden ein principieller Unterschied zu machen wäre. Welche Art der Zerlegung beim Anschreiben der Gleichung (1) gemeint ist, bedarf in jedem Falle einer besonderen Festsetzung, wenn diese nicht schon aus dem ganzen Zusammenhange hervorgeht.

---

*) Die Lehre von den Dimensionen der physikalischen Grössen setze ich als bekannt voraus. — Im Anschlusse an die Ausführungen des Textes sei hier noch darauf hingewiesen, dass man bei der Festsetzung der Dimensionen auch die Richtung der in ihnen vorkommenden Längen in Betracht ziehen kann, wie dies in einer neueren Arbeit von W. Williams (Phil. Mag. (5) 34. p. 234. 1892) dargelegt ist.

§ 2. Addition von Vectoren.

Zwei Vectoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die von gleicher Art und gleich gerichtet sind, lassen sich ohne Weiteres addiren, indem man die Summe ihrer Tensoren nimmt und die Richtung ungeändert lässt. Bei entgegengesetzter Richtung tritt an die Stelle der numerischen die algebraische Addition, die die Subtraction in sich begreift.

Vectoren ungleicher Art, z. B. eine Kraft und eine Geschwindigkeit lassen sich überhaupt nicht addiren. Sind die Vectoren aber von gleicher Art und unterscheiden sie sich nur durch ihre Richtung und ihre Grösse von einander, so lassen sie sich zwar nicht im Sinne der gewöhnlichen Algebra, wohl aber in einem erweiterten Sinne addiren, der aus den folgenden Festsetzungen, die als die Definition der Addition von Vectoren anzusehen sind, hervorgeht.

Sind zunächst, um mit dem einfachsten Falle zu beginnen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei gerichtete Strecken, so versteht man unter ihrer Summe (zum Unterschiede von der numerischen Summe kann man sie die Vectorsumme, geometrische oder graphische Summe nennen, doch ist eine ausdrückliche derartige Kennzeichnung überflüssig, sobald $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als Vectoren eingeführt sind) jene Strecke $\mathfrak{C}$, die den Anfangspunkt von $\mathfrak{A}$ mit dem Endpunkt von $\mathfrak{B}$ verbindet, nachdem $\mathfrak{B}$ an $\mathfrak{A}$ angereiht war. Mit anderen Worten heisst dies, dass der durch die nebenstehende Abbildung angegebene Zusammenhang der Strecken $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \text{ (Abb. 1)} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dargestellt wird.

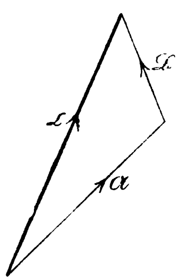


Abb. 1.

Die geometrische Summe enthält die algebraische als speciellen Fall in sich, denn sie geht in diese über, sobald $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ parallel zu einander sind.

Die geometrische Summirung von Vectoren anderer Art lässt sich auf die von zwei Strecken zurückführen, indem man mit Hülfe von Gleichung (1) im vorigen § die Vectoren durch Strecken darstellt. Man setze etwa

$$\mathfrak{A} = m \cdot \mathfrak{a}; \qquad \mathfrak{B} = m \cdot \mathfrak{b}$$

wo nun m ein Maassstabverhältniss und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Strecken sind; dann ist

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = m\,\mathfrak{a} + m\,\mathfrak{b} = m\,(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}),$$

womit die Aufgabe auf die geometrische Summirung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ hinausläuft.

Allgemein wird schon seit langer Zeit dieses Verfahren und der ihm zu Grunde liegende Begriff beim Zusammensetzen der Kräfte angewendet. Die Construction eines Kräfteparallelogramms, oder in reinerer Form (insofern als Ueberflüssiges dabei vermieden ist) die eines Kräftedreiecks bedeutet ja nichts anderes als eine geometrische Summirung. In den Bezeichnungen der Vector-Algebra lässt sich der Satz vom Parallelogramm der Kräfte in seiner allgemeinsten Form durch die Gleichung

$$\mathfrak{R} = \Sigma\, \mathfrak{P}$$

ausdrücken, wobei natürlich $\mathfrak{R}$ die Resultirende der $\mathfrak{P}$ bedeutet. Das Summenzeichen kann sich hier nur auf eine geometrische Summirung beziehen, da die dahinter stehenden Grössen $\mathfrak{P}$ durch die Schrift als Vectoren kenntlich gemacht sind.

§ 3. Die Grundvectoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$.

Alle übrigen Vectoren lassen sich nach dem Vorigen durch Scalaren und Strecken ausdrücken. Alle Strecken lassen sich aber wiederum auf 3 Grundstrecken, die man beliebig wählen kann (abgesehen davon, dass ihre Richtungen nicht alle in einer Ebene enthalten sein dürfen) zurückführen. Daraus ergiebt sich, dass sich alle Vectoren mit Zuhülfenahme von Scalaren aus drei Grundvectoren ableiten lassen. Man wählt hierzu drei wechselseitig auf einander senkrecht stehende Strecken von der Länge Eins und bezeichnet sie mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$.

Die Grundvectoren bilden dann ein rechtwinkliges Achsensystem mit einander. Dabei ist es aber noch von Wichtigkeit darauf zu achten, in welcher Weise die $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ in diesem Achsensystem aufeinander folgen. Bekanntlich lassen sich zwei rechtwinklige Achsensysteme XYZ nicht immer so zur Deckung bringen, dass alle gleichbezeichneten Achsen aufeinander fallen; es gibt vielmehr zwei Arten solcher Achsensysteme, die man als Rechts- und Linkssysteme von einander unterscheidet. Alle Rechtssysteme lassen sich unter sich zur Deckung bringen und ebenso alle Linkssysteme unter sich, aber nicht die einen mit den andern. Je nachdem man sich für das eine oder andere System bei der Wahl der Coordinatenachsen entscheidet, fallen die Gleichungen der analytischen Geometrie oder die der Mechanik etwas verschieden aus, und zwar unterscheiden sie sich in gewissen Fällen durch den Wechsel eines Vorzeichens. Es ist daher von grosser Wichtigkeit, dass man bei jeder Untersuchung von vornherein keinen Zweifel darüber aufkommen lässt, welche Achsenrichtung man zu Grunde legt. In dieser Schrift werde ich mich stets des von Maxwell (und den englischen Gelehrten überhaupt) gewählten Rechtssystemes bedienen.

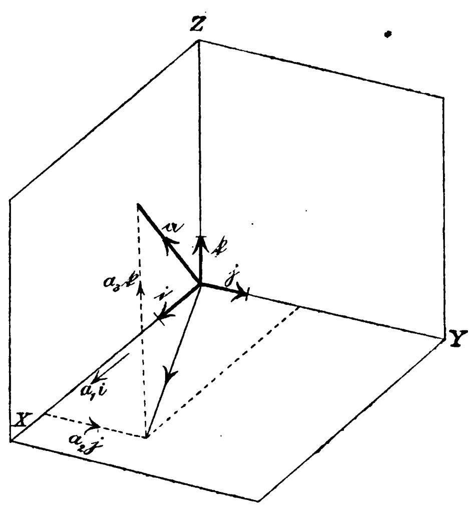


Abb. 2.

Durch Abbildung 2 wird dieses in axonometrischer Zeichnung zur Darstellung gebracht. Die Achsen, auf denen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ gewählt sind, und die zugleich den Achsen der XYZ entsprechen mögen, folgen so aufeinander, dass eine Drehung aus der $\mathfrak{i}$-Richtung in die $\mathfrak{j}$-Richtung, verbunden mit einer fortschreitenden Bewegung in der $\mathfrak{k}$-Richtung zu einer rechtsgängigen Schraube führt. — Eine Vertauschung etwa von $\mathfrak{i}$ mit $\mathfrak{j}$ würde zu einem Linkssysteme führen.

Hat man nun eine beliebig gerichtete Strecke $\mathfrak{a}$ (Abbildung 2), so projicire man sie, um sie auf die Grundvectoren zurückzuführen, zunächst etwa auf die XY- (oder $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$) -Ebene und zerlege die Projection wieder in zwei Componenten nach den Coordinatenachsen. Die X-Componente von $\mathfrak{a}$ bildet dann nur ein Vielfaches des gleichgerichteten Grundvectors $\mathfrak{i}$ und lässt sich, wenn der Tensor mit a_1 bezeichnet wird nach Gleichung (1) durch $a_1 \mathfrak{i}$ darstellen. Nach der Definition der geometrischen Summe (Gleichung (2)) ist aber

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{i} + a_2 \mathfrak{j} + a_3 \mathfrak{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Tensoren der Componenten a_1 a_2 a_3 gehen aus dem Tensor a des ganzen Vectors durch Multiplication mit dem cos des betreffenden Richtungswinkels hervor. Ausserdem hat man nach dem Pythagoräischen Satze die Beziehung

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Hiermit ist nachgewiesen, dass sich in der That jede Strecke auf die 3 Grundvectoren zurückführen lässt. Für irgend einen anderen Vector $\mathfrak{A}$ setze man aber (wenn wie in § 2 m das Maassstabverhältniss bedeutet)

$$\mathfrak{A} = m\mathfrak{a} = m a_1 \mathfrak{i} + m a_2 \mathfrak{j} + m a_3 \mathfrak{k}$$

Die Vectoren $m a_1 \mathfrak{i}$, $m a_2 \mathfrak{j}$, $m a_3 \mathfrak{k}$ bilden die Componenten des Vectors $\mathfrak{A}$; $m a_1$, $m a_2$, $m a_3$ sind die Tensoren dieser Componenten, die man des kürzeren Ausdruckes wegen häufig auch selbst die Componenten nennt. Bezeichnet man sie mit A_1 A_2 A_3, so wird

$$\mathfrak{A} = A_1 \mathfrak{i} + A_2 \mathfrak{j} + A_3 \mathfrak{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Damit ist auch $\mathfrak{A}$ auf die 3 Grundvectoren zurückgeführt.

§ 4.

Die geometrische Summe ist denselben Rechengesetzen unterworfen wie die algebraische Summe. Namentlich darf man die Reihenfolge der Glieder vertauschen, ohne das Resultat zu ändern. Für die Summirung des Vectors aus seinen Componenten nach Gleichung (3) ergibt sich dies ohne Weiteres aus der Betrachtung der Abbildung 2, nachdem diese soweit als nöthig, noch durch Ziehen der übrigen Projectionsstrahlen ergänzt ist.

Hat man aber irgend eine Vectorsumme $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, so lässt sich diese durch Anwendung von (5) und rein algebraische Summirung der gleichgerichteten Componenten auf die Form bringen

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = (A_1 + B_1 + C_1)\,\mathfrak{i} + (A_2 + B_2 + C_2)\,\mathfrak{j} + (A_3 + B_3 + C_3)\,\mathfrak{k} \quad . \quad . \quad (6)$$

aus der die Vertauschbarkeit der Glieder in $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ sofort hervorgeht.

Ebenso ist es gleichgültig, ob man z. B. $A_1 \cdot \mathfrak{i}$ oder $\mathfrak{i} \cdot A_1$ schreibt; der Sinn ist in jedem Falle der in Gleichung (1) definirte. Freilich gilt dies zunächst nur so lange, als von den beiden Factoren wenigstens einer ein Scalar ist.

§ 5. Das scalare Product.

In der Algebra der Vectoren bildet man auch Producte aus zwei Vectoren und zwar kann man aus den Vectoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf zwei verschiedene Arten ein Product ableiten. Das eine, mit dem wir es hier zu thun haben, heisst das scalare Product, weil es eine scalare Grösse liefert und das Product der gewöhnlichen Algebra aus zwei Scalaren als speciellen Fall in sich schliesst.

Durch Definition setzen wir fest, dass das scalare Product

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} = A \cdot B \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

ist, wobei $\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ den Cosinus des Winkels zwischen den Richtungen der Vectoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im gewöhnlichen Sinne der Trigonometrie bedeutet. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleichgerichtet, so wird $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB$ und sind sie entgegengesetzt gerichtet, so ist, wie in der gewöhnlichen Algebra, ihr Product $= - AB$, weil der $\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ dann den Werth -1 annimmt.

Stehen die Vectoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ senkrecht zu einander, so wird ihr scalares Product nach Gleichung (7) gleich Null. Wendet man dies auf die Grundvectoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ an, so erhält man

$$\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{i}\mathfrak{k} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

dagegen ist

$$\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Betrachtet man, wie in der Quaternionentheorie, die Grundvectoren als imaginäre Einheiten, so wird man dazu geführt, ihre Quadrate gleich -1 anstatt gleich $+1$ zu setzen. Ich folge indessen hier Heaviside, indem ich von dieser Beziehung zu imaginären Einheiten ganz absehe und für das scalare Product zweier Vectoren oder für das Quadrat eines Vectors nur die durch Gleichung (7) ausgesprochene Definition als maassgebend ansehe.

Führt man die Vectoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf die Grundvectoren zurück, und führt dann die Multiplication nach den Multiplicationsgesetzen der gewöhnlichen Algebra aus, so erhält man mit Berücksichtigung von (8) und (9)

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{B} &= (A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k})(B_1\mathfrak{i} + B_2\mathfrak{j} + B_3\mathfrak{k}) \\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10) \end{aligned}$$

Der hier für $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gefundene Werth steht aber mit dem in (7) festgesetzten vollständig in Uebereinstimmung, da nach einem bekannten Satze

$$\begin{aligned} \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \cos(\mathfrak{A}X)\cos(\mathfrak{B}X) &+ \cos(\mathfrak{A}Y)\cos(\mathfrak{B}Y) \\ &+ \cos(\mathfrak{A}Z)\cos(\mathfrak{B}Z) \quad . \; . \; . \; . \quad (11) \end{aligned}$$

ist. Anstatt diesen Satz, wie es hier geschah, als bekannt vorauszusetzen, kann man ihn übrigens auch unmittelbar durch den Vergleich von (10) mit (7) beweisen, nachdem man vorher nachgewiesen hat, dass die Anwendung der gewöhnlichen Multiplicationsgesetze für die scalaren Producte berechtigt ist.

Hiervon überzeugt man sich aber leicht, unabhängig von dem Vorhergehenden, durch die im Folgenden kurz angedeutete Reihe von Schlüssen. Es sei $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{a}$ ein irgendwie gerichteter Einheitsvector, dann soll $\mathfrak{a}\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{a}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \mathfrak{a}\mathfrak{A} + \mathfrak{a}\mathfrak{B}$ sein. Nun ist aber $\mathfrak{a}\mathfrak{C}$ nach (7) gleich der Projection von $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{a}$ und Gleiches gilt von $\mathfrak{a}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{B}$. Aus der unmittelbaren Anschauung ergibt sich aber, dass in der That die Projection von $\mathfrak{C}$ auf jede beliebige Richtung gleich der algebraischen Summe der Projectionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf dieselbe Richtung sein muss, woraus die Behauptung folgt. Durch Multiplication mit irgend einem Scalar können wir den Einheitsvector $\mathfrak{a}$ in einen beliebigen anderen Vector verwandeln, für den der Satz daher ebenfalls zutrifft. — Ferner ist

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}) &= (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{C} + (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\mathfrak{D} \\ &= \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{D} \qquad (11^a)\end{aligned}$$

u. s. f.

§ 6. Einfache Anwendungen.

Geben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die beiden Seiten eines Parallelogramms an, so ist die von dem gemeinsamen Anfangspunkte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ausgehende Diagonale (Abb. 3) nach der Definition der Vectorsumme gleich $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und die andere gleich $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$. Ferner ist

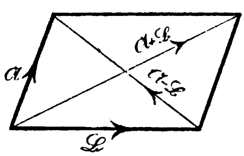


Abb. 3.

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2 &= \mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2 \\ (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})^2 &= \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2.\end{aligned}$$

Durch Addition beider Gleichungen erhalten wir

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2 + (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})^2 = 2\mathfrak{A}^2 + 2\mathfrak{B}^2.$$

Das Quadrat eines Vectors ist aber nach Gleichung (7) gleich dem Quadrate seines Tensors und wir haben damit den Satz bewiesen, dass die Summe der Quadrate über den Diagonalen eines Parallelogramms gleich der Summe der Quadrate über allen vier Seiten ist. Ebenso findet man

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^2 - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})^2 = 4\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

d. h. das scalare Product aus den Seiten eines Parallelogramms ist gleich dem vierten Theile von der Differenz der Quadrate der Diagonalen. Für ein rechtwinkliges Parallelogramm werden die Diagonalen gleich lang und das scalare Product der Seiten zu Null.

Bezeichnet $\mathfrak{P}$ eine Kraft und $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes (beide als Vectoren aufgefasst), so ist $\mathfrak{P}\mathfrak{v}$ die auf die Zeiteinheit bezogene Arbeitsleistung. Für die Arbeit der Resultirenden $\mathfrak{R}$ von Kräften $\mathfrak{P}$, die an einem Punkte angreifen, erhalten wir durch Multiplication der schon früher aufgeführten Gleichung $\mathfrak{R} = \Sigma\,\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{v}$ das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten $\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{v} = \Sigma\,\mathfrak{P}\mathfrak{v}$. Gerade diese Anwendungen auf die Arbeitsleistungen von Kräften machen das scalare Product so werthvoll für die Mechanik.

§ 7. Das Vectorproduct.

Durch eine von der vorigen völlig verschiedene Operation erhält man aus zwei Vectoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einen neuen Vector $\mathfrak{C}$, der das Vectorproduct der beiden genannt und in Zeichen

$$\mathfrak{C} = V\mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

geschrieben wird. Die Rechtfertigung dafür, dass man diese Operation ebenfalls als eine Productbildung ansieht, besteht darin, dass auch für sie im Allgemeinen die gewöhnlichen Multiplicationsregeln gültig bleiben, — allerdings, wie sich sofort zeigen wird, mit einer wichtigen Ausnahme.

Das Vectorproduct $\mathfrak{C}$ wird aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dadurch abgeleitet, dass man zunächst die Richtung von $\mathfrak{C}$ senkrecht zu beiden und zwar in dem Sinne wählt, dass die Aufeinanderfolge $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu einem Rechtssysteme (vgl. § 3) im Raume führt. Der Tensor von $\mathfrak{C}$ ist aber gleich dem Producte von A und B und dem Sinus des von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eingeschlossenen Winkels. Bezeichnet man diesen Winkel mit ε, so ist demnach

$$C = AB \sin \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

oder gleich dem Inhalte des durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmten

Parallelogramms und bei den in Abb. 4 gewählten Richtungen steht die Richtung von $\mathfrak{C}$ senkrecht zur Papierfläche und geht von dem Papiere aus nach dem Beschauer hin.

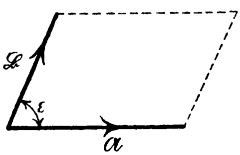


Abb. 4.

Aendert man die Reihenfolge der beiden Factoren im Vectorproducte, so kehrt sich nach diesen Festsetzungen zugleich die Richtung des Vectorproductes $\mathfrak{C}$ in die entgegengesetzte um, denn dann muss die Reihenfolge $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$ ein Rechtssystem im Raume ergeben. Wir haben also

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{A} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

und das ist die vorher erwähnte Abweichung von den gewöhnlichen Multiplicationsregeln.

Dagegen wird das Vectorproduct aus zwei geometrischen Summen nach denselben Regeln wie das Product aus zwei algebraischen Summen gebildet. Um dies zu zeigen, beweise ich zunächst, dass

$$\mathrm{V}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\mathfrak{D} = \mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{D} \quad \ldots \quad (15)$$

ist. Der Kürze halber sei $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ gesetzt. Die vorstehende Gleichung ist unabhängig von jeder Bezugnahme auf ein bestimmtes Coordinatensystem und einer der wichtigsten Vorzüge der Vector-Algebra besteht eben in dieser Lostrennung von dem nothwendigen Zusammenhange mit einem willkürlich gewählten Achsensysteme, während sie doch einen Uebergang zu einem solchen in jedem Augenblicke gestattet, wenn sich daraus ein Vortheil für die Beweisführung ergibt.

Auch hier wähle ich zur Vereinfachung des Beweises ein Coordinatensystem, dessen X- oder $\mathfrak{i}$-Achse in die Richtung des Vectors $\mathfrak{D}$ fallen möge. Der Vector $\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ fällt dann nach Definition in die YZ-Ebene und steht zugleich senkrecht auf $\mathfrak{A}$, daher auch auf der Projection von $\mathfrak{A}$ in der YZ-Ebene, die vorübergehend mit $\mathfrak{A}'$ bezeichnet sei. Der Tensor von

$\mathfrak{A}'$ ist aber gleich $A \sin \varepsilon$, d. h. gleich $A \sin (\mathfrak{A}\mathfrak{D})$. Tragen wir daher diesen Tensor rechtwinklig zu $\mathfrak{A}'$ ab, so muss er nur noch mit dem Tensor D multiplicirt werden, um sofort das $\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ anzugeben. Nun war $\mathfrak{A}' = A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k}$. Der Vector, den wir erhalten, wenn wir $\mathfrak{A}'$ um einen rechten Winkel drehen, ist daher (vgl. Abb. 5) gleich $A_3\mathfrak{j} - A_2\mathfrak{k}$; demnach

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{D} = DA_3\mathfrak{j} - DA_2 \cdot \mathfrak{k}.$$

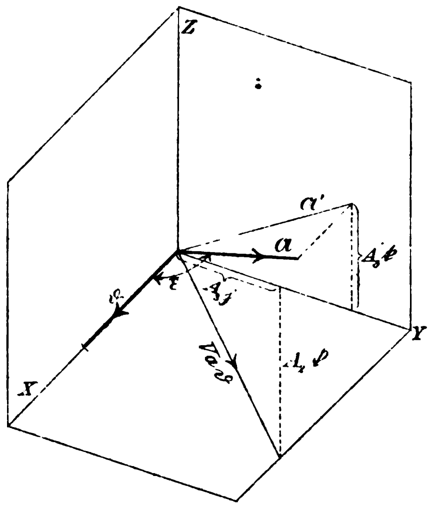


Abb. 5.

Dies bleibt gültig für jede Richtung, die wir dem Vector $\mathfrak{A}$ geben mögen. Wir haben daher auch

$$\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{D} = DB_3\mathfrak{j} - DB_2\mathfrak{k}$$

und

$$\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = DC_3\mathfrak{j} - DC_2 \,.\, \mathfrak{k}.$$

Beachten wir aber, dass $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ und daher $C_2 = A_2 + B_2$ und $C_3 = A_3 + B_3$ war, so folgt aus dem Vergleiche der gefundenen Werthe unmittelbar die aufgestellte Behauptung.

Ebenso ist

$$\mathrm{V}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}) = \mathrm{V}\mathfrak{A}(\mathfrak{C} + \mathfrak{D}) + \mathrm{V}\mathfrak{B}(\mathfrak{C} + D)$$
$$= \mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

u. s. f.

§ 8.

Wir wollen den soeben bewiesenen Satz dazu verwenden, um das Vectorproduct auf die Grundvectoren bei beliebiger Lage des Achsensystems zurückzuführen. Zunächst folgt aus der Definition des Vectorproducts

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{V}\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{k};\quad \mathrm{V}\mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{i};\quad \mathrm{V}\mathfrak{k}\mathfrak{i} = \mathfrak{j} \\ \mathrm{V}\mathfrak{j}\mathfrak{i} = -\mathfrak{k};\quad \mathrm{V}\mathfrak{k}\mathfrak{j} = -\mathfrak{i};\quad \mathrm{V}\mathfrak{i}\mathfrak{k} = -\mathfrak{j} \\ \mathrm{V}\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i} = \mathrm{V}\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j} = \mathrm{V}\mathfrak{k}\mathfrak{k} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (17)$$

Zur letzten Zeile ist noch hinzuzufügen, dass das Vectorproduct aus zwei gleichgerichteten Vectoren stets gleich Null ist. Man hat daher z. B. niemals Veranlassung, von dem Vectorquadrate eines Vectors zu reden, da dies immer Null wäre. — Ferner ist

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathrm{V}(A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k})(B_1\mathfrak{i} + B_2\mathfrak{j} + B_3\mathfrak{k})$$
$$= \mathfrak{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathfrak{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \mathfrak{k}(A_1B_2 - A_2B_1) \quad (18)$$

wie man bei Ausführung der Multiplication mit Beachtung der durch (17) gegebenen Beziehungen erkennt.

In Determinantenform lässt sich diese Gleichung wie folgt wiedergeben

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18^a)$$

was sich dem Gedächtnisse leicht einprägt.

§ 9. Anwendungen.

In allen Theilen der mathematischen Physik macht man sehr häufig von der Transformation auf ein anderes Coordinatensystem Gebrauch. Bei Anwendung der Vector-Algebra kommt dies seltener vor, da man von vornherein unabhängig von jedem Coordinatensystem ist und der Uebergang zu einem solchen von beliebig gewählten Achsenrichtungen ohne jede eigentliche Coordinatentransformation erfolgen kann. Wird es aber doch einmal nöthig, so lassen sich mit Hülfe des Vectorproducts die hierbei zu beobachtenden Beziehungen in viel einfacherer und eleganterer Weise herleiten als auf jedem anderen Wege.

Man habe zwei Coordinatensysteme XYZ und $X'Y'Z'$, die beide Rechtssysteme sein und im Ursprunge zusammenfallen sollen. Wir haben dann im Ganzen 9 Winkel zwischen je einer Achse des einen und des anderen Achsensystems, deren Cosinus die aus der folgenden tabellarischen Zusammenstellung ersichtlichen Bezeichnungen (α_1 u. s. f.) erhalten mögen:

	X	Y	Z
X'	α_1	α_2	α_3
Y'	β_1	β_2	β_3
Z'	γ_1	γ_2	γ_3

Mit Hülfe dieser 9 Winkelcosinus lassen sich die Coordinaten xyz irgend eines Punktes in dem einen Coordinatensysteme durch die Coordinaten $x'y'z'$ im anderen, und umgekehrt, wie folgt, ausdrücken:

$$\begin{array}{l|l} x' = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z & x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' \\ y' = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z & y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' \\ z' = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z & z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' \end{array}$$

Von den 9 Winkelcosinus können aber nur ~~zwei~~ drei willkürlich angenommen werden; die übrigen sind von diesen abhängig. Es handelt sich um die Ableitung der zwischen ihnen bestehenden Beziehungen. Wir nehmen dazu zwei Systeme von Grundvectoren $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ an, die mit den Coordinatensystemen gleich gerichtet sind. Zwischen diesen bestehen dann dieselben Gleichungen wie zwischen xyz und $x'y'z'$, also

$$\mathfrak{i}' = \alpha_1 \mathfrak{i} + \alpha_2 \mathfrak{j} + \alpha_3 \mathfrak{k}; \quad \mathfrak{i} = \alpha_1 \mathfrak{i}' + \beta_1 \mathfrak{j}' + \gamma_1 \mathfrak{k}'$$

u. s. f., von denen die erste nur aussagt, dass $\mathfrak{i}'$ gleich der Vectorsumme seiner Componenten nach den Richtungen der xyz sein muss.

Das scalare Product von $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{j}'$ oder von $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{k}'$ u. s. f. muss $= 0$ sein, da diese senkrecht zu einander stehen und wir erhalten daher 6 Gleichungen, von denen es genügt, die beiden folgenden anzuschreiben:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0; \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Sechs andere Gleichungen erhält man, wenn man beachtet, dass das Quadrat jedes Grundvectors $= 1$ sein muss, also

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1\,; \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

u. s. f.

Zu diesen Beziehungen, die leicht auch auf anderem Wege gefunden werden konnten, treten aber noch einige andere, zu deren Ableitung sich besonders die Anwendung des Vectorproducts eignet. Nach Gleichung (17) ist $V\mathfrak{i}'\mathfrak{j}' = \mathfrak{k}'$ und daher, wenn wir $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ in $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ ausdrücken und das Vectorproduct nach Gleichung (18) entwickeln:

$$\begin{aligned}\mathfrak{i}(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) + \mathfrak{j}(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) + \mathfrak{k}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\\ = \gamma_1\mathfrak{i} + \gamma_2\mathfrak{j} + \gamma_3\mathfrak{k}.\end{aligned}$$

Diese Gleichung zerfällt in die folgenden 3:

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2\,; \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3\,; \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Ebenso erhält man aus $V\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}$, wenn man auf die Grundvectoren $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ zurückgeht und wie vorher verfährt

$$\alpha_{\cancel{1}\,3} = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\,; \quad \beta_{\cancel{1}\,3} = \alpha_2\gamma_1 - \alpha_1\gamma_2\,; \quad \gamma_{\cancel{1}\,3} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Dazu kommen die durch cyclische Vertauschung aus diesen hervorgehenden Gleichungen. — Ebenso erkennt man nun leicht, dass die Determinante aller 9 Winkelcosinus

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix} = 1$$

ist. Denn entwickelt man etwa nach den Unterdeterminanten von $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ und beachtet die soeben abgeleiteten (durch cyclische Vertauschung aus den angeschriebenen hervorgehenden) Beziehungen, so geht die Determinante auf den Werth $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ zurück. Hierbei ist aber wohl zu beachten, dass diese Beziehungen nur dann gelten, wenn beide Coordinatensysteme, wie es hier vorausgesetzt war, Rechtssysteme (oder allgemein Systeme derselben Art) sind. Für die Transformation aus einem Rechtssystem in ein Linkssystem würde die Determinante der Winkelcosinus den Werth -1 annehmen, wie man leicht erkennt, wenn man beachtet, dass das Vectorproduct $V\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'$ gleich $-\mathfrak{k}'$ wird, wenn $\mathfrak{i}'\mathfrak{j}'\mathfrak{k}'$ ein Linkssystem bilden.

§ 10. **Bewegung starrer Körper.**

Auch die Kinematik starrer Körper lässt sich durch die Benutzung des Vectorproductes sehr vereinfachen. In Abbildung 6 sei MN eine Achse, um die der starre Körper eine Drehung ausführt. Wir wählen die positive Richtung von MN so, dass sich eine rechtshändige Schraubenbewegung ergeben würde, wenn wir mit der wirklich ausgeführten Drehung eine Bewegung im Sinne von MN verbinden wollten. Tragen wir auf MN eine Strecke ab, die den so bestimmten Pfeil erhält und durch ihre Grösse die Winkelgeschwindigkeit der Drehung angiebt, so ist die Bewegung als Vectorgrösse dargestellt, wobei indessen noch ein Punkt O der Drehachse gegeben werden muss, da durch den Vector nur die Richtung und nicht die specielle Lage der Drehachse angegeben wird.

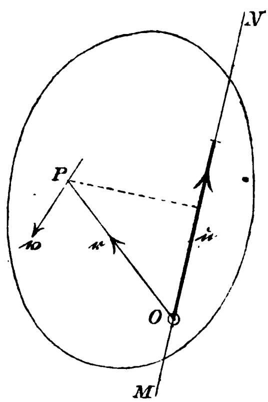


Abb. 6.

Für den starren Körper sei jetzt der Punkt O und die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ als Vectorgrösse gegeben, man soll die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ irgend eines Punktes P nach Grösse und Richtung ermitteln, wenn die Lage von P zu O durch den Vector $\mathfrak{r}$ bestimmt ist. Man erkennt leicht, dass

$$\mathfrak{v} = V\mathfrak{u}\mathfrak{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

denn zunächst bewegt sich P offenbar senkrecht zu der durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{u}$ gelegten Ebene und der Pfeil ist, wie ein Blick auf die Figur lehrt, so gerichtet wie der des Vectorproducts. Der

Grösse nach finden wir $\mathfrak{v}$ durch Fällen eines Perpendikels von P auf die Drehachse und Multiplication desselben mit der Winkelgeschwindigkeit; das gibt aber genau den Tensor $ur \sin(\mathfrak{u}\,\mathfrak{r})$ des Vectorproductes, womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus dem durch Gleichung (19) ausgesprochenen Satze folgt unmittelbar die Art der Zusammensetzung von mehreren Rotationen, wenn die Drehachsen alle durch denselben Punkt O gehen. Man hat, wenn $\mathfrak{v}$ die Resultirende und $\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' \ldots$ die durch die Drehungen $\mathfrak{u}'\mathfrak{u}'' \ldots$ hervorgebrachten Geschwindigkeiten angeben

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}' + \mathfrak{v}'' + \ldots. = \mathrm{V}\mathfrak{u}' \cdot \mathfrak{r} + \mathrm{V}\mathfrak{u}'' \cdot \mathfrak{r} + \ldots. = \mathrm{V}(\mathfrak{u}' + \mathfrak{u}'' + \ldots.) \cdot \mathfrak{r},$$

d. h. die Bewegung besteht in einer Drehung um eine gleichfalls durch O gehende Achse, für die sich Richtung und Winkelgeschwindigkeit aus $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}' + \mathfrak{u}'' + \ldots$ bestimmt.

Die allgemeinste Art der Bewegung erhalten wir, wenn wir annehmen, dass der Körper neben der Drehung um die Achse MN zugleich noch eine Translation ausführt. Die Translationsgeschwindigkeit ist dann zugleich die Geschwindigkeit des Punktes O, der nun ein beliebig gewählter Punkt des Körpers sein kann. Bezeichnen wir sie daher mit $\mathfrak{v}_0$, so wird durch

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

die Vertheilung der Geschwindigkeiten über die materiellen Punkte eines sich beliebig bewegenden Körpers in ihrer allgemeinsten Form angegeben.

Das zweite Glied auf der rechten Seite von Gleichung (20) nimmt für verschiedene Punkte P des Körpers alle möglichen Grössen und Richtungen an, nur mit der Beschränkung, dass es stets senkrecht zu $\mathfrak{u}$ bleibt. Falls $\mathfrak{v}_0$ ebenfalls senkrecht zu $\mathfrak{u}$ steht, kann man daher stets einen Punkt auffinden, für den $\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{r} = -\mathfrak{v}_0$, also $\mathfrak{v} = 0$ wird. Die Bewegung ist dann eine einfache Rotation und wird durch Gleichung (19) zur Darstellung gebracht, indem wir den Punkt O nach jenem Punkte verschieben.

Im andern Falle, wenn also $\mathfrak{v}_0$ nicht senkrecht zu $\mathfrak{u}$ steht, kann man es in zwei Componenten zerlegen: $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_0' + \mathfrak{v}_0''$, von denen $\mathfrak{v}_0'$ parallel zu $\mathfrak{u}$ geht und $\mathfrak{v}_0''$ senkrecht dazu ist. Auch dann lässt sich wieder ein Punkt ermitteln, für den $\mathfrak{v}_0'' = -V\mathfrak{u}\mathfrak{r}$. Nehmen wir an, dass das aus dieser Bedingungsgleichung bestimmte $\mathfrak{r}$ gleich $\mathfrak{r}_0$ sei, so geht Gleichung (20) in die folgende über

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}'_0 + V\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0).$$

Die Vectordifferenz $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0$ gibt aber die Lage irgend eines dritten Punktes zum Punkte $\mathfrak{r}_0$ an. Die Gleichung spricht daher aus, dass jede beliebige Bewegung in einem gegebenen Augenblicke als eine Schraubenbewegung aufgefasst werden kann. Die Momentanachse geht durch den Punkt $\mathfrak{r}_0$ und wird durch die Richtung von $\mathfrak{u}$ bestimmt.

Auch der Satz, dass aus zwei gleich grossen Rotationen um zwei parallele Achsen in entgegengesetzter Richtung eine Translation senkrecht zu der Ebene, die durch beide Achsen gelegt werden kann, hervorgebracht wird, lässt sich leicht auf dieselbe Art nachweisen. Zählt man die Abstände $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ von zwei Punkten O und O' auf den parallelen Achsen, so ist mit $\mathfrak{u}' = -\mathfrak{u}$ nach (19)

$$\mathfrak{v} = V\mathfrak{u}\mathfrak{r} - V\mathfrak{u}\mathfrak{r}' = V\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}').$$

Die Vectordifferenz $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'$ ist aber gleich dem Abstande der Punkte OO'. Die rechte Seite der Gleichung ist daher unabhängig von $\mathfrak{r}$ oder von der Lage des Punktes; die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist daher für alle Punkte gleich gross und steht senkrecht zu $\mathfrak{u}$ und zur Verbindungslinie OO', w. z. b. w.

§ 11. Producte aus 3 Vectoren.

Durch zweimalige Anwendung der vorhergehenden Productbildungen kann man aus drei (auch der Reihenfolge nach) gegebenen Vectoren Producte von drei verschiedenen Arten aus 3 Factoren ableiten. Die sich hierfür ergebenden Rechengesetze sind zwar schon in den früheren enthalten, oder lassen sich doch leicht auf diese zurückführen; zur Gewinnung einer besseren Uebersicht, und um später kurz darauf verweisen zu können, sollen diese 3 Producte hier indessen noch einzeln besprochen werden.*)

Aus den 3 Vectoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ lassen sich, wenn man die angegebene Reihenfolge beibehält, die folgenden Producte ableiten:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{C}; \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$$
$$E = \mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C}; \quad E' = V\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{F} = V\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

In der ersten Zeile wird ein Vector mit dem scalaren Product aus zwei anderen Vectoren multiplicirt; wir haben es also hier mit einer gewöhnlichen Multiplication zu thun. Das Resultat ist wieder ein Vector $\mathfrak{D}$, der mit $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{D}'$, der mit $\mathfrak{C}$ gleich gerichtet ist. Daraus erkennt man schon, dass $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ zwei völlig verschiedene Werthe sind. Wollte man einfach $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ schreiben, so hätte dies keinen bestimmten Sinn. Erst durch das Hinzutreten des Punktes, der hier als Trennungszeichen auftritt, wird dieser gegeben. An Stelle des Punktes kann man auch Klammern anwenden, um die Zusammengehörigkeit der Factoren anzugeben, also $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C})$ und $\mathfrak{D}' = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}$.

In der zweiten Zeile haben wir es mit scalaren Producten aus einem Vector und dem Vectorproducte der beiden anderen Vectoren zu thun. Für E' schreibt man besser, um jeden Zweifel über den Sinn der Operation auszuschliessen $(V\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C}$. Doch kann die Klammer auch fortgelassen werden, da $V(\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})$ überhaupt keinen Sinn hätte, indem die Operation V nur an zwei Vectoren und nicht an dem Scalar $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und dem Vector $\mathfrak{C}$ ausgeführt werden kann.

*) Auf die in der Quaternionentheorie vorkommenden Producte allgemeiner Art aus 3 oder mehr Vectoren gehe ich hier gar nicht ein, da sie leicht entbehrt werden können.

Hier führt die Productbildung zu den Scalaren E und E'. Während nun $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{D}'$ völlig verschieden war, sind E und E' einander gleich; es ist

$$\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}V\mathfrak{C}\mathfrak{A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Diese Gleichung spricht einen wichtigen Satz aus, dem noch hinzuzufügen ist, dass jedes dieser 3 Produkte den Inhalt des aus den Kanten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zusammengesetzten Parallelepipeds angibt. Um sich davon zu überzeugen, beachte man, dass nach Gleichung (13), S. 15, der Tensor von $V\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ den Inhalt der aus den Kanten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildeten Seitenfläche des Parallelepipeds darstellt. Die Richtung von $V\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ steht dagegen senkrecht zu diesem Parallelogramm und liegt mit $\mathfrak{A}$ auf der gleichen Seite dieser Fläche, wenn die Aufeinanderfolge der Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu einem Rechtssystem führt. Wir erhalten nun das scalare Product $\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, wenn wir den Tensor von $\mathfrak{A}$ mit dem Tensor von $V\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und dem Cosinus des Winkels zwischen $\mathfrak{A}$ und jener Normalen multipliciren (§ 5). Das Product aus A und diesem Cosinus ist aber die Projection von $\mathfrak{A}$ auf die Normale, d. h. die zur Seitenfläche $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gehörige Höhe des Parallelepipeds.

Damit ist erstens bewiesen, dass $\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in der That den Inhalt des Parallelepipeds angibt, zweitens, dass $\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ einen positiven Werth hat, wenn die Kantenaufeinanderfolge $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ein Rechtssystem bildet, einen negativen im entgegengesetzten Falle, und drittens, dass die Gleichung (21) erfüllt ist, indem für jedes der beiden anderen Producte dieselben Schlüsse gelten und weil die Aufeinanderfolgen $\mathfrak{C}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ gleichfalls zu Rechtssystemen führen, wenn dies für $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zutrifft.

Selbstverständlich ist, wie schon aus Gleichung (14) S. 16 hervorgeht, $\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}V\mathfrak{C}\mathfrak{B}$.

Wenn es sich nur darum gehandelt hätte, den durch Gleichung (21) ausgesprochenen Satz zu beweisen, wäre man auf rechnerischem Wege noch einfacher zum Ziele gelangt.

Es wäre nur nöthig gewesen, die Vectorproducte nach Gleichung (18) S. 18 zu entwickeln und dann das scalare Product nach Gleichung (10) S. 13 anzuschreiben. Man wäre dann in allen drei Fällen zu demselben Resultate gelangt, das, wie aus Gleichung (18ᵃ) unmittelbar zu entnehmen ist, sich in Form der Determinante aller Componenten anschreiben lässt:

$$\mathfrak{A}\,V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\,V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,V\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \quad (22)$$

§ 12.

Ich gehe jetzt über zur Betrachtung des Vectorproducts

$$\mathfrak{F} = V\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Zunächst erkennt man leicht, dass $\mathfrak{F}$ in der durch die Vectoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestimmten Ebene enthalten sein und dass es in dieser Ebene senkrecht zur Projection von $\mathfrak{A}$ auf dieselbe stehen muss. Denn der Vector $V\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ steht senkrecht zur Ebene $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{F}$ steht senkrecht zu diesem Vector, liegt also in $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$.

Führt man die Vectorproducte nach Gleichung (18) aus, so erhält man

$$V\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{i}\,\{A_2(B_1C_2 - B_2C_1) - A_3(B_3C_1 - B_1C_3)\} \\ + \mathfrak{j}\,\{\ldots.\} + \mathfrak{k}\,\{\ldots.\}.$$

Der Klammerinhalt, der zu $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ gehört, ergibt sich aus dem zu $\mathfrak{i}$ gehörigen, indem man jeden Index um 1 bezw. 2 erhöht, wobei ein Uebergang von 3 zu 1 als eine Erhöhung um 1 angesehen wird. Der zu $\mathfrak{i}$ gehörige Klammerwerth lässt sich aber wie folgt ordnen

$$B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3) - C_1(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$

und ähnlich bei den anderen Gliedern. Mit Rücksicht auf Gleichung (10) erhält man daher

$$V\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{i}\,(B_1\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{C} - C_1\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B}) + \mathfrak{j}\,(B_2\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{C} - C_2\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \\ + \mathfrak{k}\,(B_3\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{C} - C_3\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

oder nach Auflösung der Klammern und Zusammenfassung der mit gleichen Factoren $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ bezw. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ versehenen Glieder

$$V\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Damit ist der wichtige Satz bewiesen, dass ein Product dritter Art von den im Eingange von § 11 aufgezählten auf zwei Producte erster Art $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ zurückgeführt werden kann. Mit seiner Hülfe findet man auch leicht

$$V\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} + V\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B} + V\mathfrak{B}V\mathfrak{C}\mathfrak{A} = 0 \quad . \quad . \quad (24)$$

indem man jedes der drei Glieder nach (23) entwickelt.

Schliesslich betrachte ich noch das scalare Product aus zwei Vectorproducten

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot V\mathfrak{C}\mathfrak{D}.$$

Dieses ist von der Form $E = \mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in § 11, wobei nur der Vector $\mathfrak{A}$ selbst durch ein Vectorproduct ersetzt ist. Wir können daher die in Gleichung (21) ausgesprochene Umformung darauf anwenden, also

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot V\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mathfrak{C}V\mathfrak{D}V\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Der zweite Factor dieses scalaren Products lässt sich aber nach Gleichung (23) weiter umformen und man erhält dann für das ganze Product

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{D})$$

oder, wenn wir die Klammer auflösen,

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot V\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{D} \quad . \quad . \quad (25)$$

§ 13. Princip der virtuellen Geschwindigkeiten und Satz der statischen Momente.

An einem starren Körper mögen sich die Kräfte $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3 \ldots$ im Gleichgewichte halten. Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist dann für jede beliebige Bewegung des Körpers die algebraische Summe der von diesen Kräften geleisteten Arbeiten gleich Null. Diese Bedingung ist nicht nur nothwendig, sondern auch hinreichend für das Gleichgewicht der Kräfte $\mathfrak{P}$.

Der Satz gilt ebensowohl für endliche als für unendlich kleine Bewegungen des Körpers. Gewöhnlich wird er aber auf unendlich kleine Bewegungen angewendet und so soll es auch hier geschehen.

Bezeichnen wir den Weg des Angriffspunktes 1 der Kraft $\mathfrak{P}_1$ mit $d\mathfrak{w}_1$, so ist die bei der unendlich kleinen Bewegung des Körpers von $\mathfrak{P}_1$ geleistete Arbeit (vgl. § 6) gleich dem scalaren Producte aus $\mathfrak{P}_1$ und $d\mathfrak{w}_1$, also gleich

$$\mathfrak{P}_1 d\mathfrak{w}_1$$

und der Satz lässt sich in der Form

$$\sum \mathfrak{P} d\mathfrak{w} = 0$$

aussprechen. —

Der Bewegungszustand eines starren Körpers wird in seiner allgemeinsten Form durch Gleichung (20) ausgedrückt. Multipliciren wir diese Gleichung mit dem Zeitelemente dt, so geht $\mathfrak{v}dt$ in $d\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{u}dt$ in $d\mathfrak{s}$ über. Der unendlich kleine Vector $d\mathfrak{s}$ gibt hier durch seine Richtung die Richtung der Momentanachse an und der Grösse nach gibt er den Winkel an, um den sich der Körper im Zeitelemente dt um diese Achse drehte.

Wir haben also

$$d\mathfrak{w} = d\mathfrak{w}_0 + \mathrm{V} d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{r}.$$

Setzen wir dies in die vorhergehende Gleichung ein, so geht sie über in

$$d\mathfrak{w}_0 \sum \mathfrak{P} + \sum \mathfrak{P} \mathrm{V} d\mathfrak{s} \mathfrak{r} = 0.$$

Diese muss für jedes beliebige $d\mathfrak{w}_0$ und jedes beliebige $d\mathfrak{s}$ erfüllt sein. Sie zerfällt also in die Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum \mathfrak{P} = 0 \quad \text{und} \quad \sum \mathfrak{P} \mathrm{V} d\mathfrak{s} \mathfrak{r} = 0.$$

Die erste kennen wir schon aus § 2 als die Formulirung des Gesetzes vom Parallelogramm der Kräfte, das sich hiermit als eine Folgerung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten darstellt. Die zweite Gleichung behandeln wir noch weiter, indem wir die in Gleichung (21) ausgesprochene Umformung darauf anwenden. Sie geht dadurch über in

$$d\mathfrak{s}\sum V\mathfrak{r}\mathfrak{P} = 0.$$

Der Factor $d\mathfrak{s}$ konnte vor das Summenzeichen gestellt werden, da er für alle Punkte des starren Körpers denselben Werth hat. — Die Gleichung muss aber, wie schon bemerkt, für jede beliebige Bewegung des starren Körpers, also auch für jeden beliebigen Werth von $d\mathfrak{s}$ erfüllt sein und sie lässt sich daher ersetzen durch

$$\sum V\mathfrak{r}\mathfrak{P} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

In dieser Form spricht sie aber den Satz von den statischen Momenten aus. Die in ihr vorkommenden Radienvectoren $\mathfrak{r}$ sind von einem beliebig gewählten Punkte aus nach den Angriffspunkten der Kräfte $\mathfrak{P}$ zu ziehen.

Die Aussage des Satzes von den statischen Momenten weicht hier allerdings von der in der Cartesischen Darstellungsweise gebrauchten etwas ab. Der Unterschied bedeutet aber nur einen wichtigen Vorzug unserer Aussage vor dieser.

Die statischen Momente sind hiernach Vectorgrössen, während sie bei der sonst üblichen Behandlung als scalare Grössen angesehen werden. Daher kommt es auch, dass bei der Cartesischen Behandlung der Mechanik die Momenten-Bedingung stets auf 3 Achsen angewendet werden muss, während hier die einzige Gleichung (26) dafür an die Stelle tritt. Die Momente der gewöhnlichen Mechanik sind nämlich nichts anderes als die Componenten der Vectoren, die nach der hier behandelten Darstellungsform als die statischen Momente aufzufassen sind.

Der Momentensatz ist von so grosser Bedeutung für die Mechanik, dass es sich rechtfertigen wird, wenn ich hier noch etwas länger bei ihm verweile. — Am einfachsten gestaltet sich seine Anwendung in der gewöhnlich gebrauchten Form, wenn es sich nur um Kräfte handelt, die alle in derselben Ebene liegen. Statisches Moment ist dann das Product aus dem Tensor der Kraft und dem Hebelarm, d. h. dem Perpendikel vom Momentenpunkte auf die Kraftrichtung. Eine kleine Schwierigkeit, die aber leicht überwunden wird, tritt nur insofern noch auf, als man zwischen Momenten positiven und negativen Vorzeichens zu unterscheiden hat.

Das Vectorproduct aus $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{P}$, das nach der Methode der Vectoren als das statische Moment von $\mathfrak{P}$ anzusehen ist, hat nach § 7 ebenfalls das Product aus Kraft und Hebelarm zum Tensor. Es ist aber selbst ein Vector, der zur Ebene, in der die Kräfte und der Momentenpunkt enthalten sind, senkrecht steht. Den entgegengesetzten Vorzeichen entsprechen hier die beiden Richtungen der Normalen. Da nur diese beiden entgegengesetzten Richtungen vorkommen, geht die geometrische Summirung in die gewöhnliche algebraische Summirung über. Insofern weichen also die Darstellungen in beiden Fällen nur unerheblich von einander ab.

Anders ist es aber, wenn die Kräfte und der Momentenpunkt nicht mehr alle in derselben Ebene liegen. Für Momente, die nach der von den ebenen Problemen her gewohnten gewöhnlichen Definition von Momentenpunkten aus gerechnet werden, gilt er dann überhaupt nicht mehr. Er ist z. B. schon in dem einfachsten Falle nicht mehr erfüllt, dass sich drei in derselben Ebene liegende Kräfte an einem Punkte im Gleichgewichte halten, sobald der Momentenpunkt ausserhalb dieser Ebene gewählt wird. Der Grund dafür ist jetzt leicht ersichtlich: nicht die algebraische, sondern die geometrische Summe der als Vectoren aufgefassten Momente wird zu Null.

Desshalb ist man in der Cartesischen Darstellungsweise genöthigt, die Momente von Kräften im Raume von einer Achse aus zu rechnen. Dass der Satz für diesen Fall wieder gültig ist und wie die statischen Momente dann zu bilden sind, ergibt sich leicht aus Gleichung (26), wenn man sie mit einem in beliebiger Richtung durch den Momentenpunkt gezogenen Einheitsvector $\mathfrak{e}$ scalar multiplicirt. Man erhält dann (mit Anwendung von Gleichung 21)

$$\sum \mathfrak{e} V \mathfrak{r} \mathfrak{P} = \sum \mathfrak{P} V \mathfrak{e} \mathfrak{r} = 0.$$

Der Hebelarm, mit dem der Tensor von $\mathfrak{P}$ zu multipliciren ist, um das auf die Achse $\mathfrak{e}$ bezogene Moment zu erhalten, ist demnach die Projection des Vectors $V\mathfrak{e}\mathfrak{r}$ auf die Richtungslinie von $\mathfrak{P}$.

Anstatt mit den Projectionen der Momente auf Achsen $\mathfrak{e}$ oder, wie gewöhnlich, auf die drei Coordinatenachsen zu rechnen, ist es aber weit einfacher, ein für allemal die statischen Momente nur auf Momentenpunkte zu beziehen und sie demgemäss als Vectoren aufzufassen, unter dem Momente einer Kraft $\mathfrak{P}$ für einen beliebigen Momentenpunkt, von dem der Radiusvector $\mathfrak{r}$ nach dem Angriffspunkte gezogen ist, also stets den Ausdruck

$$V\mathfrak{r}\mathfrak{P}$$

zu verstehen. — Nebenbei wird dadurch auch der Vortheil erreicht, den physikalischen Unterschied zwischen einem statischen Momente und der von einer Kraft geleisteten Arbeit deutlich vor Augen zu führen. Wenn beide sonst auch dieselbe physikalische Dimension besitzen, also in derselben Weise von den physikalischen Grundmaassen abhängen, so ist doch das statische Moment eine Vectorgrösse und eine Arbeitsleistung ein Scalar.

Die Zerlegung und Zusammensetzung von Kräften an einem starren Körper beruht stets und ausschliesslich auf den beiden Sätzen vom Parallelogramm der Kräfte und von der Zulässigkeit der Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft. Es sei daher noch darauf hingewiesen, dass auch der letzte Satz sich leicht aus dem Momentensatze in Form der Gleichung (26) herleiten lässt. Verschieben wir nämlich den Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{P}$ längs deren Richtungslinie um $\mathfrak{p}$, so ist jetzt $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r} + \mathfrak{p}$ übergegangen und wir erhalten für das Moment nach der Verlegung

$$V(\mathfrak{r} + \mathfrak{p})\mathfrak{P} \quad \text{oder} \quad V\mathfrak{r}\mathfrak{P} + V\mathfrak{p}\mathfrak{P}.$$

Das zweite Glied dieser Summe ist aber nach der Definition des Vectorproducts gleich Null und das Moment ist daher für jede beliebige Lage des Momentenpunkts unverändert geblieben. Wenn vorher Gleichgewicht bestand, muss daher auch nachher noch Gleichgewicht bestehen.

Bisher war immer nur von dem Gleichgewichtsfalle die Rede. Es folgt aber aus den Betrachtungen sofort auch, dass zwei Kräftesysteme an einem starren Körper nur dann äquivalent sein können, wenn ihre Momentensummen für jeden beliebigen Momentenpunkt gleich sind. Besonders muss auch, falls sich eine Resultirende für die Kräfte angeben lässt, deren Moment stets gleich der Summe der Momente aller dieser Kräfte sein.

Zweites Capitel.

Die Differential-Operatoren.

§ 14. Differentiirung nach einer scalaren Veränderlichen.

Die unabhängige scalare Veränderliche sei mit t bezeichnet. Der Zuwachs des Vectors $\mathfrak{A}$ für dt ist als ein Vectorzuwachs in demselben Sinne zu betrachten, wie die Addition von Vectoren in § 2 erklärt wurde; d. h. also

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{i}dA_1 + \mathfrak{j}dA_2 + \mathfrak{k}dA_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Die Grundvectoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ sind bei der Differentiation als constant anzusehen. Für 27 kann man auch schreiben

$$\dot{\mathfrak{A}} = \mathfrak{i}\dot{A}_1 + \mathfrak{j}\dot{A}_2 + \mathfrak{k} \cdot \dot{A}_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27^a)$$

indem man die Differentiation durch Punkte (das Newton'sche Fluxionszeichen) bezeichnet, oder auch

$$p \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{i}pA_1 + \mathfrak{j}pA_2 + \mathfrak{k}pA_3 \quad . \quad . \quad . \quad (27^b)$$

wo p für d/dt gesetzt ist. Gerade die letzte Schreibweise eignet sich für manche Untersuchungen der mathematischen Physik sehr gut und wird neuerdings vielfach angewendet.

Man kann in (27^b) p als einen scalaren Operator bezeichnen und den Satz dahin aussprechen, dass die Operation p so erfolgt, als wenn p ein Multiplicator wäre.

Es bleibt nun noch festzustellen, was man durch die Operation p an einem scalaren oder Vectorproducte erhält. Eine einfache Betrachtung zeigt aber, dass hier genau dieselben Differentiationsregeln gelten, wie für die algebraischen Producte. Um z. B. das Differential von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ abzuleiten, setze man $(\mathfrak{A} + d\mathfrak{A})(\mathfrak{B} + d\mathfrak{B}) - \mathfrak{A}\mathfrak{B}$, führe die Multiplication nach Gleichung (11^a) S. 14 aus und beseitige das Glied zweiter Ordnung. Dasselbe Verfahren bleibt nach Gleichung (16) S. 17 auch für $d\,\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ anwendbar. Man erhält so die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) &= \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} \\ \frac{d}{dt}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} &= \mathrm{V}\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \mathrm{V}\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\cdot\mathfrak{B} \end{aligned}\right\} \quad . \;\; . \;\; . \quad (28)$$

denen hier noch die folgenden angefügt werden mögen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathfrak{A}\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{C}) &= \dot{\mathfrak{A}}\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathrm{V}\dot{\mathfrak{B}}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathrm{V}\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{C}} \\ \frac{d}{dt}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{C} &= \mathrm{V}\dot{\mathfrak{A}}\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathrm{V}\mathfrak{A}\mathrm{V}\dot{\mathfrak{B}}\mathfrak{C} + \mathrm{V}\mathfrak{A}\mathrm{V}\mathfrak{B}\dot{\mathfrak{C}} \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

§ 15. Anwendungen.

In den physikalischen Anwendungen ist die unabhängige scalare Veränderliche t, nach der man zu differentiiren hat, meistens die Zeit. Eine gleichfalls sehr nützliche geometrische Deutung des Differentialquotienten ergibt sich indessen, wenn der abhängige Vector als Radiusvector einer Curve angesehen wird, deren Bogenlänge durch die unabhängige Veränderliche gemessen wird. So wie jede Gleichung $y = f(x)$ als Gleichung einer ebenen Curve, kann $\mathfrak{A} = f(t)$ als Gleichung einer Raumcurve angesehen werden.

In Abb. 7 (Seite 34) ist der veränderliche Vector mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet; er legt die Curvenpunkte von einem festen Anfangspunkte O aus fest; mit s ist die scalare unabhängige Veränderliche bezeichnet, d. h. die Länge des von einem zweiten auf der Curve liegenden Anfangspunkte P aus gerechneten Bogens. Der Zuwachs von $\mathfrak{r}$, der einer Zunahme $\triangle s$ entspricht, oder $\triangle \mathfrak{r}$ ist gleich der Sehne, die zum Bogen $\triangle s$ gehört. In der Grenze fällt $\triangle \mathfrak{r}$ mit $\triangle s$ zusammen; aber auch dann ist noch ein Unterschied zwischen ihnen zu machen. Wenn sie auch numerisch gleich sind, so ist doch $\triangle \mathfrak{r}$ ein Vector und $\triangle s$ ein Scalar; die Division von $\triangle \mathfrak{r}$ durch $\triangle s$ liefert daher wieder einen Vector, dessen Tensor in der Grenze gleich 1 ist und dessen Richtung mit der Tangentenrichtung zusammenfällt. Bezeichnen wir diesen mit $\mathfrak{t}_1$, wobei der Index 1 darauf hinweisen soll, dass der Tensor von $\mathfrak{t}_1$ immer gleich der Einheit ist, so gilt demnach die Gleichung

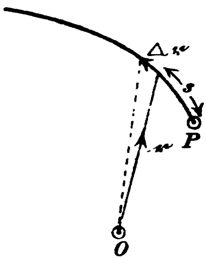


Abb. 7.

$$\mathfrak{t}_1 = \frac{d\mathfrak{r}}{ds} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

Der zweite Differentialquotient von $\mathfrak{r}$ steht in engster Beziehung mit dem Krümmungshalbmesser der Curve. Dieser sei mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet, wobei schon durch die Schreibweise angedeutet ist, dass er als Vector aufgefasst werden soll. Dabei sei $\mathfrak{R}$ vom Krümmungsmittelpunkte nach der Curve hin gerichtet.

Zunächst ist

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = \frac{d\mathfrak{t}_1}{ds}.$$

Die Aenderung von $\mathfrak{t}_1$ besteht aber nur in einer Richtungsänderung, da der Tensor stets gleich 1 bleibt. Das Differential $d\mathfrak{t}_1$ muss daher senkrecht zu $\mathfrak{t}_1$ stehen. Es muss ferner auch in der durch $\mathfrak{t}_1$ und das darauf folgende $\mathfrak{t}_1 + d\mathfrak{t}_1$ gelegten Ebene enthalten sein, d. h. in der Schmiegungsebene der Curve. Aus beidem folgt, dass die Richtungslinie von $d\mathfrak{t}_1$ mit der von $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. Zugleich erkennt man aus der geometrischen Anschauung, dass $d\mathfrak{t}_1$ einen dem von $\mathfrak{R}$ entgegengesetzt gerichteten Pfeil hat. Es bleibt nun nur noch die metrische Beziehung, die zwischen beiden besteht, festzustellen. Der

Tensor von $d\mathfrak{t}_1$ ist aber gleich dem Tensor von $\mathfrak{t}_1$ mal dem Contingenz-Winkel der Curve $d\varphi$, also einfach $= d\varphi$. Andererseits ist $Rd\varphi$ gleich ds. Daraus folgt sofort, wenn wir beachten, dass $\mathfrak{R}$ und $d\mathfrak{t}_1$ entgegengesetzt gerichtet sind,

$$\mathfrak{R} \cdot \frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

§ 16.

Die vorher betrachtete Curve soll jetzt als die Bahn eines materiellen Punktes angesehen werden, der sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ darauf bewegt; der Vector $\mathfrak{v}$ ist dann gleich gerichtet mit $\mathfrak{t}_1$. Aus dem Begriffe der Geschwindigkeit folgt

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \mathfrak{t}_1 \frac{ds}{dt}.$$

Dies liefert uns nur den bekannten Satz, dass $\frac{ds}{dt}$ den Tensor der Geschwindigkeit angibt. — Wir wollen jetzt aus dem Werthe von $\mathfrak{v}$ die Beschleunigung $\mathfrak{g}$ ableiten

$$\mathfrak{g} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{t}_1}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + \mathfrak{t}_1 \frac{d^2s}{dt^2}$$
$$= \frac{d\mathfrak{t}_1}{ds} \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathfrak{t}_1 \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$$

oder mit Rücksicht auf die Entwickelungen des vorigen §

$$\mathfrak{g} = -\mathfrak{R}_1 \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathfrak{t}_1 \frac{d^2s}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

wenn unter $\mathfrak{R}_1$ ein Einheitsvector in der Richtung von $\mathfrak{R}$ und unter R wie gewöhnlich der Tensor von $\mathfrak{R}$ verstanden wird.

Die Gleichung zeigt, dass die Beschleunigung $\mathfrak{g}$ sich aus 2 Componenten zusammensetzt. Das erste Glied gibt die Normalbeschleunigung mit dem Tensor v^2/R, das zweite die Tangentialbeschleunigung an.

§ 17. Der Operator ∇.

Eine Differentiation eines Vectors nach einem anderen unabhängig veränderlichen Vector kann im Allgemeinen nicht ausgeführt werden. Man kann zwar, wenn $\mathfrak{A} = f(\mathfrak{B})$, leicht die Differentiale $d\mathfrak{A}$ und $d\mathfrak{B}$ und das Verhältniss beider bilden, aber der Werth dieses Quotienten würde nicht einer bestimmten festen Grenze zustreben, wenn wir die Differentiale unendlich klein werden lassen, sondern diese Grenze würde sich verändern mit der Art, auf die wir $d\mathfrak{B}$ zu Null werden lassen. Nur wenn man die Vector-Algebra auf ein zweidimensionales Gebiet beschränken wollte, könnte man gewisse Functionen angeben, die eine solche Differentiation zulassen. Man käme damit auf die Theorie der Functionen complexer Variabeln, mit der aber die Vector-Algebra in dem Umfange und in der Fassung, wie sie für die Behandlung physikalischer Probleme gebraucht wird, nur eine sehr entfernte Aehnlichkeit besitzt.

Der Begriff der einfachen Differentiation muss daher in unserem Gebiete auf die in den vorhergehenden §§ erörterten Differentiationen nach scalaren Veränderlichen beschränkt werden.

Wenn auch eine Erweiterung der scalaren Differentiirung nicht möglich ist, so tritt doch eine erhebliche Bereicherung unserer Hülfsmittel durch die Einführung des Operators ∇ ein, der jene in gewissem Sinne ersetzt. Der Operator ∇ verhält sich zum scalaren Operator p wie ein Vector zu einem Scalar; er kann daher selbst als ein Vector-Operator bezeichnet werden. Die Definition dieses durch Hamilton eingeführten Operators wird durch die Gleichungen gegeben

$$\nabla = \mathfrak{i}\,\partial/\partial x + \mathfrak{j}\,\partial/\partial y + \mathfrak{k}\,\partial/\partial z \quad \ldots \quad (33)$$

oder

$$\nabla A = \mathfrak{i}\frac{\partial A}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial A}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial A}{\partial z} \quad \ldots \quad (34)$$

In Gleichung (34) ist die Operation ∇ an einem Scalar A ausgeführt; sie gibt, wie man sieht, einen Vector. — Bei der in (33) und (34) gegebenen Rechenvorschrift zur Ausführung der Operation ∇ kommt die Beziehung auf ein bestimmtes Coordinatensystem vor, während ∇A selbst direct aus A hervorgegangen gedacht werden kann, ohne dass irgend ein Coordinatensystem damit etwas zu schaffen hätte. Um sich hiervon zu überzeugen, muss man den Nachweis führen, dass ∇A ungeändert bleibt, wenn wir an Stelle des früheren Coordinatensystems irgend ein neues einführen.

Zu diesem Zwecke greife man auf die Betrachtungen des § 9 zurück. Bezeichnen wir den auf das zweite Coordinatensystem $X'Y'Z'$ bezogenen Operator ∇ mit ∇', so wird mit Anwendung der früheren Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\nabla' &= \mathfrak{i}'\partial/\partial x' + \mathfrak{j}'\partial/\partial y' + \mathfrak{k}'\partial/\partial z' \\ &= (\alpha_1\mathfrak{i} + \alpha_2\mathfrak{j} + \alpha_3\mathfrak{k})(\partial/\partial x \cdot \alpha_1 + \partial/\partial y \cdot \alpha_2 + \partial/\partial z \cdot \alpha_3) + \ldots\end{aligned}$$

wobei nur das erste Glied $\mathfrak{i}'\partial/\partial x'$ entwickelt ist. Zieht man nun alle Glieder zusammen, die zu den gleichen Grundvectoren gehören, so erhält man

$$\begin{aligned}\nabla' = \mathfrak{i}\{&(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)\,\partial/\partial x + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2)\,\partial/\partial y \\ &+ (\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3)\,\partial/\partial z\} + \mathfrak{j}\{\cdots\cdots\} + \mathfrak{k}\{\cdots\cdot\}\end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich aber durch die in § 9 zusammengestellten Beziehungen zwischen den Winkelcosinus zu

$$\nabla' = \mathfrak{i}\partial/\partial x + \mathfrak{j}\partial/\partial y + \mathfrak{k}\partial/\partial z$$

und damit ist der Satz bewiesen, dass ∇ eine Operation ist, die unabhängig von jeder Wahl des Coordinatensystems immer zu demselben Resultate führt, oder

$$\nabla' = \nabla \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (35)$$

Dabei ist es gleichgültig, ob wir die Operation ∇ an einem Scalar oder an einem Vector ausführen.

§ 18.

Die analytische Bedeutung von ∇A ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung. Wenn der Scalar A eine Function der Coordinaten xyz ist, können wir ihn auch als Function des Radiusvector $\mathfrak{r}$ ansehen, der von einem festen Punkte des Raumes aus nach dem variablen Punkte gezogen ist. Unter

$dx\,dy\,dz$ sind dann die Componenten des Vectorzuwachses $d\mathfrak{r}$ zu verstehen, so dass

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{i}dx + \mathfrak{j}dy + \mathfrak{k}dz.$$

Multipliciren wir diese Gleichung der Reihe nach mit den Grundvectoren, so erhalten wir (vgl. § 5)

$$dx = \mathfrak{i}d\mathfrak{r}; \quad dy = \mathfrak{j}d\mathfrak{r}; \quad dz = \mathfrak{k}d\mathfrak{r}.$$

Auf den rechten Seiten stehen die scalaren Producte aus $d\mathfrak{r}$ und den Grundvectoren. Nun ist nach der Analysis der Scalaren

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz,$$

oder nach Einführung der vorher gefundenen Werthe für die $dx\,dy\,dz$

$$dA = d\mathfrak{r}\left(\mathfrak{i}\frac{\partial A}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial A}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial A}{\partial z}\right) = d\mathfrak{r} \cdot \nabla A \quad . \quad (36)$$

∇A ist also jener Vector, dessen scalares Product mit der unendlich kleinen Verschiebung des Punktes, auf den sich A bezieht, die zugehörige Aenderung von A angibt.

Man könnte versucht sein, ∇A hiernach einfach als den Differentialquotienten von A nach $\mathfrak{r}$ zu bezeichnen. Das ist aber desshalb nicht richtig, weil auf der rechten Seite von (36) nicht ein gewöhnliches, sondern ein scalares Product steht. Aus der Gleichung

$$A = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$$

kann man $\mathfrak{C}$ nicht ermitteln, wenn A und $\mathfrak{B}$ gegeben sind. Man kann daher auch den Werth von ∇A nicht aus (36) als einen Quotienten von dA und $d\mathfrak{r}$ darstellen. Immerhin leistet der Vector ∇A ähnliche Dienste wie ein Differentialquotient.

Aus (36) ergibt sich sofort noch eine weitere Eigenschaft von ∇A. Von einem Punkte des Raumes ausgehend, denke man sich alle übrigen Punkte aufgesucht, für die A den gleichen Werth behält. Alle diese Punkte werden auf einer Fläche enthalten sein, die man als eine Niveaufläche bezeichnet.

Aus (36) folgt nun sofort, dass ∇A senkrecht zu der Niveaufläche steht, denn nur für den Fall, dass die Verschiebung $d\mathfrak{r}$ rechtwinklig zu ∇A steht, wird das scalare Product $d\mathfrak{r} \cdot \nabla A$ zu Null.

Zieht man eine Normale $\mathfrak{n}$ zur Niveaufläche in der Richtung von ∇A, so wird für $d\mathfrak{r} = d\mathfrak{n}$

$$dA = dn \cdot (\nabla A)_0,$$

wenn wir unter dn den Tensor von $d\mathfrak{n}$ und unter $(\nabla A)_0$ den von ∇A verstehen. Da wir es jetzt nur noch mit scalaren Grössen zu thun haben, können wir daraus weiter schliessen

$$\frac{dA}{dn} = (\nabla A)_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

d. h. der Tensor von ∇A ist gleich dem Differentialquotienten von A nach der Richtung der Normalen zur Niveaufläche. Zugleich erkennt man, dass der Vector ∇A von der Stelle niederen zu der Stelle höheren Niveaus hin gerichtet ist.

Auch aus diesen Betrachtungen folgt ohne Weiteres, dass ∇A eine von jeder Beziehung auf ein bestimmtes Coordinatensystem unabhängige Bedeutung besitzt. Der im vorigen § gegebene analytische Nachweis hierfür wäre dadurch entbehrlich gemacht, wenn es sich nicht empfehlen würde, diese Beziehungen von mehreren Seiten her zu beleuchten.

§ 19. Der Operator ($\mathfrak{a}\nabla$).

Aus der Operation ∇ geht die Operation $\mathfrak{a}\nabla$ hervor, worin $\mathfrak{a}$ irgend ein Vector ist. Der Sinn ist der, dass zunächst das scalare Product aus $\mathfrak{a}$ und dem symbolischen Ausdruck von ∇ (Gleichung 33, S. 36) genommen und die sich hieraus ergebende Operation ausgeführt werden soll. Für $\mathfrak{a}\nabla$ erhält man nach Gleichung (10) S. 13

$$\mathfrak{a}\nabla = a_1\, \partial/\partial x + a_2\, \partial/\partial y + a_3\, \partial/\partial z \quad \ldots \quad (38)$$

und, wenn wir die Operation an dem Scalar A ausführen,

$$(\mathfrak{a}\nabla) \cdot A = a_1 \frac{\partial A}{\partial x} + a_2 \frac{\partial A}{\partial y} + a_3 \frac{\partial A}{\partial z} \cdot \quad \ldots \quad (39)$$

Zu demselben Resultate wird man geführt, wenn man zuerst ∇A bildet und dann erst das scalare Product hiervon mit $\mathfrak{a}$ nimmt. Man hat also die Gleichung

$$(\mathfrak{a}\nabla)A = \mathfrak{a}\cdot\nabla A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

die indessen nur so lange gültig bleibt als A, wie hier vorausgesetzt und durch die Schreibweise schon angedeutet ist, ein Scalar ist.

Mit Benutzung der Operation $\mathfrak{a}\nabla$ lässt sich die Gleichung (36) des vorigen § noch in anderer Form anschreiben. Versteht man nämlich unter dr den Tensor von $d\mathfrak{r}$ und unter $\mathfrak{r}_1$ einen in der Richtung von $d\mathfrak{r}$ gezogenen Einheitsvector, so dass $d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 dr$ ist, so erhält man aus (36)

$$\frac{dA}{dr} = (\mathfrak{r}_1\nabla)A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Die Operation $\mathfrak{r}_1\nabla$, die an einem Scalar ausgeführt immer wieder einen Scalar ergibt, ist also gleich der Variation von A in der Richtung $\mathfrak{r}_1$. Wenn A ein Potential ist, lehrt sie uns also die Grösse der in die Richtung $\mathfrak{r}_1$ fallenden Kraft kennen.

Führen wir die Operation $\mathfrak{a}\nabla$ an einem scalaren Producte aus, so erhalten wir

$$(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\cdot(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A} \quad . \quad . \quad (42)$$

Der Beweis ergibt sich leicht aus der Verbindung der Gleichungen (39) und (28).

§ 20. Die Operation ∇ an einem Vector.

An einem Vector lässt sich die Operation ∇ auf zwei verschiedene Arten ausführen. Der Operator ∇ hat nämlich selbst die Form eines Vectors und seine Verknüpfung mit dem Vector, auf den er sich bezieht, kann entweder nach den Regeln der Bildung des scalaren oder des Vectorproducts erfolgen. Auf den ersten Blick erscheint es vielleicht willkürlich in dieser Verknüpfung überhaupt eine Art der Productbildung zu erblicken. Man beachte aber, dass bei der

Durchführung der durch die Definition von ∇ in Gleichung (33) gegebenen Rechenvorschrift sofort die Producte der Grundvectoren auftreten und es bedarf daher in der That einer näheren Festsetzung, welche Art der Productbildung hierbei angewendet werden soll.

Schreiben wir einfach $\nabla \mathfrak{A}$, so ist damit die scalare Productbildung angezeigt. Im anderen Falle ist $V \nabla \mathfrak{A}$ zu schreiben.

Von den beiden Werthen, zu denen man so geführt wird, ist der erste ein Scalar, der zweite ein Vector. Beide sind für die mathematische Physik und besonders für die Elektricitätslehre von grösster Bedeutung. Es ist daher wünschenswerth, für sie noch besondere Operationszeichen zu besitzen, die an die Stelle der zuweilen unbequemen Schreibweise, namentlich von $V \nabla \mathfrak{A}$ treten können. Diese hat Maxwell in der „Convergenz", abgekürzt „conv", und dem „curl" eingeführt. Heaviside hat dann noch für das Negative der Convergenz die „Divergenz" oder div gebraucht. Weinstein, der Herausgeber der deutschen Uebersetzung des Maxwell'schen Buches hat curl (wörtlich Locke oder Windung, Kräuselung) mit Rotation übersetzt. Ich sehe indessen keinen Vortheil darin, das eine Fremdwort durch ein anderes zu ersetzen. Besser würde es vielleicht noch sein, wenn man curl durch das stamm- und sinnverwandte deutsche Wort „Quirl" übersetzen wollte. Da aber curl allmählich zu einem Operationszeichen geworden ist, das in die wichtigsten Gleichungen der Elektricitätslehre eintritt, halte ich es für das Richtigste, das englische Wort ohne jede Aenderung in den deutschen wissenschaftlichen Sprachschatz aufzunehmen.

Wir setzen also durch Definition fest

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{A} &= -\operatorname{conv} \mathfrak{A} = \nabla \mathfrak{A} \\ \operatorname{curl} \mathfrak{A} &= V \nabla \mathfrak{A} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

§ 21. Die Operation div.

Wir wollen die Operation div, also die scalar ausgeführte Operation ∇ an irgend einem Vector $\mathfrak{A}$ jetzt wirklich vornehmen. Wir haben

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \nabla\mathfrak{A} = (\mathfrak{i}\,\partial/\partial x + \mathfrak{j}\,\partial/\partial y + \mathfrak{k}\,\partial/\partial z)(A_1\mathfrak{i} + A_2\mathfrak{j} + A_3\mathfrak{k})$$
$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

denn die scalaren Producte $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$ u. s. f. verschwinden (Gleichung (8) S. 13).

Dieser Ausdruck hat aber eine wichtige geometrische Bedeutung, die man sich am besten klar macht, indem man annimmt, der Vector $\mathfrak{A}$ bedeute die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit an dem Orte des Raumes, auf den sich $\mathfrak{A}$ bezieht. Es ist dabei keineswegs nöthig, dass $\mathfrak{A}$ diese Bedeutung wirklich besitze. Es mag irgend eine Vectorgrösse darstellen: dann werden wir aber stets die Vertheilung des Vectors $\mathfrak{A}$ im Raume durch das Bild der Geschwindigkeitsvertheilung in einer Flüssigkeit veranschaulichen können. Man kann mit anderen Worten jede Function, die in eindeutiger Weise für jeden Punkt im Raume einen Vector angibt, hydrodynamisch construiren. Diese hydrodynamische Veranschaulichung ist an sich zwar nur rein formaler Natur: sie erleichtert die Betrachtung, ohne etwas über die Gesetze auszusagen, denen der Vector $\mathfrak{A}$ unterworfen ist. Zugleich bildet sie aber nach dieser Richtung hin ein so wichtiges Hülfsmittel, wie etwa die geometrische Veranschaulichung durch eine Curve für die Eigenschaften einer Function in den Anfangsgründen der Analysis oder für die Betrachtungen über Differentialquotienten, Maxima und Minima u. s. w. So wenig man dieses Hülfsmittel vermissen möchte, so viel Werth ist auch auf die hydrodynamische Wiedergabe des Vectors $\mathfrak{A}$ zu legen. Der „Kraftfluss“ hat daher mit Recht von jeher in der Faraday-Maxwell'schen Theorie eine grosse Rolle gespielt. Auf dem Continent hat man sich lange genug gegen diese Fassung gesträubt. Sobald man aber festsetzt, dass das Wort Kraftfluss an sich gar nichts über den wirklichen Vorgang aussagt, sondern nur auf die Möglichkeit der hydrodynamischen Construction irgend eines Vectors hinweist, liegt selbst für den Gegner der Maxwell'schen Theorie kein Grund vor, sich dem Gebrauche des Wortes und des dadurch ausgedrückten Bildes zu widersetzen.

Wir denken uns also den Vector $\mathfrak{A}$ in der eben erläuterten Weise hydrodynamisch construirt, so dass er die Geschwindigkeit in einer fingirten Flüssigkeit vorstellt. In dieser Flüssigkeit denke ich mir ferner ein rechtwinkliges Parallelepipedum mit den Kanten $dx\,dy\,dz$ abgegrenzt. Durch die dem Ursprung zunächst liegende, zur X-Achse senkrechte Fläche $dy\,dz$ strömt eine Flüssigkeitsmenge in den Innenraum ein, die in jeder Secunde gleich $dy\,dz \cdot A_1$ ist, wenn wie gewöhnlich A_1 die X-Componente von $\mathfrak{A}$ bedeutet. Aus der gegenüberliegenden Seitenfläche tritt zugleich eine andere Menge aus dem Parallepipedum aus, die gleich $dy\,dz(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x} \cdot dx)$ ist. Der Ueberschuss der ausgeströmten über die eingeströmte Menge beträgt daher für dieses Paar gegenüberliegender Seitenflächen $\partial A_1/\partial x \cdot dx\,dy\,dz$. Aehnliches gilt für die anderen Seitenpaare. Im Ganzen strömt daher in der Zeiteinheit und auf das Einheitsvolumen bezogen die Menge

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

aus dem Parallelepipedum mehr aus als ein, also gerade der durch $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ dargestellte Betrag. Wir können diesen Ueberschuss der Ausströmung über die Einströmung entweder dadurch erklären, dass wir annehmen, die Flüssigkeit expandire zu dieser Zeit (oder sie ziehe sich zusammen wenn $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ negativ ist), — oder wir können die Flüssigkeit als incompressibel ansehen und im Innern des Parallelepipedums eine Flüssigkeitsquelle von der Ergiebigkeit $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ annehmen. Einem negativen $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ würde dann natürlich eine Versickerung — oder wie man diese fortwährende Beseitigung von Flüssigkeitsmenge aus dem Raume sonst nennen will — entsprechen. Gewöhnlich zieht man das letzte Bild vor. Man kann dann das gewonnene Resultat in der Form aussprechen: Die Divergenz eines Vectors gibt die Ergiebigkeit der zu dem Vectorflusse an der betreffenden Stelle und für die Volumeneinheit hinzutretenden Quelle an; die Convergenz die stattfindende Versickerung.

Wo keine solche Quelle oder Versickerung auftritt, ist $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$. Es ist dies die bekannte Continuitätsgleichung der Hydrodynamik.

Aus dieser geometrischen Bedeutung von $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ folgt zugleich, dass es unabhängig von der Wahl eines bestimmten Coordinatensystemes sein muss. Dies folgt übrigens schon unmittelbar aus dem rein analytischen Beweise, der in § 17 zu Gleichung (35) führte.

Anmerkung. Im Maxwell'schen Buche ist der scalare Theil von ∇A als die Convergenz bezeichnet (anstatt wie hier als Divergenz). Mit Rücksicht auf die der Quaternionentheorie entnommene Beziehung $\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} = -1$, anstatt wie hier (nach Heaviside) gleich $+1$ ist der scalare Theil bei Maxwell indessen das Negative von dem, was hier dafür gefunden wurde. Infolgedessen hat conv hier genau dieselbe Bedeutung wie bei Maxwell. Ein Vorzug dieser Bezeichnungen ist es übrigens, dass der Sinn sich ohne Weiteres aus dem Worte ergibt und die wirkliche Bedeutung so unzweideutig daraus hervorgeht, dass ein Irrthum im Vorzeichen, vor dem man sich in der mathematischen Physik nicht zu viel hüten kann, ganz ausgeschlossen wird.

§ 22. Die Operation curl.

Durch Ausführung der für die Operation ∇ und die Bildung des Vectorproducts festgesetzten Rechenvorschriften erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathfrak{A} &= \mathrm{V} \nabla \mathfrak{A} = \mathrm{V}(\mathfrak{i}\,\partial/\partial x + \mathfrak{j}\,\partial/\partial y + \mathfrak{k}\,\partial/\partial z)(A_1 \mathfrak{i} + A_2 \mathfrak{j} + A_3 \mathfrak{k}) \\ &= \mathfrak{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right). \quad (45) \end{aligned}$$

Symbolisch lässt sich dies auch durch die folgende Determinante darstellen

$$\operatorname{curl} \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \; . \quad (46)$$

durch die das Bildungsgesetz des curl dem Gedächtniss am besten eingeprägt wird. Ein Vergleich mit dem für $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in Gleichung (18^a) S. 18 gegebenen Ausdrucke zeigt zugleich die nahe Verwandtschaft beider Operationen. Man kann in der That, wie es vorher schon gelegentlich geschah, sagen, dass der curl das Vectorproduct des Operators mit dem Operanden bildet.

Die blosse Angabe der analytischen Ableitungsart unter Zugrundelegung eines Coordinatensystems wie in Gleichung (45) und (46) gestattet zwar, mit dem curl zu rechnen, sie gibt aber durchaus keinen klaren Einblick in die geometrische Bedeutung dieser wichtigen Operation. Dass ihr eine solche Bedeutung zukommen muss, lässt sich schon aus dem bereits in § 17 gegebenen Beweise erwarten, dass die Operation unabhängig von der Wahl eines bestimmten Coordinatensystems ist. Zum mindesten wird man verlangen müssen, dass ein Weg zur Ermittelung von curl $\mathfrak{A}$ angegeben wird, der ebenfalls keinen Bezug auf ein Coordinatensystem nimmt.

Um diesen besseren Einblick zu erhalten, wollen wir zunächst annehmen, der Vector $\mathfrak{A}$ sei überall gleich gerichtet und nur der Grösse nach veränderlich. Legen wir, um seinen curl zu ermitteln, die X-Achse in die Richtung von $\mathfrak{A}$, so vereinfacht sich Gleichung (45) hier zu curl $\mathfrak{A} = \mathfrak{j}\,\partial A_1/\partial z - \mathfrak{k}\,\partial A_1/\partial y$. Der curl steht also in diesem Falle senkrecht zu dem Vector aus dem er abgeleitet wird. — Um seine Richtung noch näher zu bestimmen, drehe man das Coordinatensystem um die X-Achse so lange bis für die neue Lage $\partial A_1/\partial y = 0$ wird. Falls nämlich $\mathfrak{A}$ nicht gerade für den betrachteten Punkt ein absolutes Maximum oder Minimum annimmt, wird man immer zwei diametral entgegengesetzte Richtungen der Y-Achse finden können, längs deren $\mathfrak{A}$ sich (wenigstens für ein unendlich kleines Intervall) nicht ändert. Die Z-Achse fällt dann in die Richtung, längs deren sich die Grösse von $\mathfrak{A}$ am schnellsten ändert. Die Gleichung für den curl geht aber dann über in $\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\frac{\partial A_1}{\partial z}$. Sie zeigt uns, dass curl $\mathfrak{A}$ in eine der beiden vorher erwähnten Richtungen fällt, längs deren sich $\mathfrak{A}$ nicht ändert und zwar in jene, für die die Aufeinanderfolge der Richtungen $\mathfrak{A}$, curl $\mathfrak{A}$ und der Richtung der zunehmenden $\mathfrak{A}$ ein Rechtssystem bildet. Der Tensor von curl $\mathfrak{A}$ wird durch die auf die Längeneinheit bezogene maximale Zunahme von $\mathfrak{A}$ bei einer Querverschiebung des veränderlichen Punktes angegeben.

Alle Differentiationen an einer Vectorsumme sind, wie aus den früheren Betrachtungen hervorgeht, auszuführen, indem man sie an jedem Gliede vornimmt. Man hat daher auch

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \operatorname{curl}\mathfrak{A} + \operatorname{curl}\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

wie die Entwickelung nach Gleichung (45) unmittelbar zeigt.

Ein Vector, der sich in beliebiger Weise ändert, kann stets als die Vectorsumme von 3 Componenten angesehen werden, die nur ihre Grösse und nicht ihre Richtung ändern. Auf Grund des soeben angegebenen Verfahrens kann man von jedem dieser Componenten den curl bilden und den des ganzen Vectors dann durch geometrische Summirung aus den Einzelresultaten ableiten. Doch führt dies schliesslich wieder auf die Bestimmung nach Gleichung (45) zurück.

Von speciellen Fällen sei hier zunächst noch der erwähnt, dass $\mathfrak{A}$ stets zu einer festen Ebene parallel bleibt und sich in der Richtung senkrecht zu dieser Ebene nicht ändert. Das ist mit anderen Worten der Fall des zweidimensionalen Problems.

Nehmen wir in diesem Falle die feste Ebene als XY-Ebene, so geht Gleichung (42) über in $\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \mathfrak{k}(\partial A_2/\partial x - \partial A_1/\partial y)$. Also auch hier steht der curl senkrecht zu dem Operanden. In anderen Fällen trifft dies aber keineswegs zu; curl $\mathfrak{A}$ kann sogar mit $\mathfrak{A}$ in dieselbe Richtung fallen.

§ 23. Mechanische Bedeutung der Operation curl.

Zunächst sei hier angenommen, dass der Operand, von dem der curl genommen werden soll, ein Radiusvector ist. Nennen wir ihn $\mathfrak{r}$, so soll also $\mathfrak{r}$ die Entfernung des bei der Differentiirung veränderlichen Punktes von einem festen Punkte des Raumes nach Grösse und Richtung angeben. Setzen wir $\mathfrak{r} = \mathfrak{i} r_1 + \mathfrak{j} r_2 + \mathfrak{k} r_3$, so ist unmittelbar klar, dass z. B. $\partial r_1/\partial x = 1$ und $\partial r_1/\partial y = 0$ ist. Setzen wir die Werthe für diese Differentialquotienten in Gleichung (45) ein, so erhalten wir sofort

$$\operatorname{curl} \mathfrak{r} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

Diese Eigenschaft, dass sein curl gleich Null ist, theilt der Radiusvector übrigens mit einer grossen Zahl von Vectoren anderer Art, die für die Physik überhaupt und besonders für die Elektricitätslehre von grosser Wichtigkeit sind. Wir werden auf diese Classe von Vectoren im nächsten Capitel näher einzugehen haben.

Nun erinnere man sich der in § 10 abgeleiteten Gleichung (20)

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r},$$

die die Geschwindigkeit des materiellen Punktes eines starren Körpers bei einer beliebigen Bewegung dieses Körpers auf die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ eines als Anfangspunkt gewählten Punktes O, auf die Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ und den Radiusvector des betrachteten Punktes zurückführt. Führen wir auf beiden Seiten die Operation curl aus, so erhalten wir

$$\operatorname{curl} \mathfrak{v} = \operatorname{curl} V\mathfrak{u}\mathfrak{r} = \operatorname{curl}\{\mathfrak{i}(u_2 r_3 - u_3 r_2) + \mathfrak{j}(u_3 r_1 - u_1 r_3) \\ + \mathfrak{k}(u_1 r_2 - u_2 r_1)\}.$$

Der curl von $\mathfrak{v}_0$ fällt nämlich fort, da $\mathfrak{v}_0$ constant ist. Bei der weiteren Entwickelung beachte man, dass die Componenten von $\mathfrak{u}$ für alle Punkte des starren Körpers denselben Werth haben und dass die Differentialquotienten von $r_1 r_2 r_3$, wie schon oben erwähnt, gleich 1 bezw. gleich Null sind.

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathfrak{v} &= \mathfrak{i}(\partial/\partial y(u_1 r_2 - u_2 r_1) - \partial/\partial z(u_3 r_1 - u_1 r_3)) \\ &+ \mathfrak{j}(\partial/\partial z(u_2 r_3 - u_3 r_2) - \partial/\partial x(u_1 r_2 - u_2 r_1)) + \mathfrak{k}(\ldots) \\ &= \mathfrak{i}\cdot 2u_1 + \mathfrak{j}\cdot 2u_2 + \mathfrak{k}\cdot 2u_3 = 2\cdot\mathfrak{u}.\end{aligned}$$

Die hieraus hervorgehende Gleichung

$$\mathfrak{u} = \tfrac{1}{2}\operatorname{curl}\mathfrak{v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

kann als die Umkehrung der Gleichung (20) angesehen werden, indem sie die Winkelgeschwindigkeit der Rotation nach Grösse und Achsenrichtung zu bestimmen gestattet, wenn die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ der einzelnen Punkte bekannt sind. Zugleich gestattet sie den besten Einblick in die geometrische und mechanische Bedeutung der Operation curl, nämlich:

Wenn ein starres System in relativer Bewegung zu einem andern ist, gibt der curl der Geschwindigkeit dieser Bewegung das Doppelte der Rotationsgeschwindigkeit nach Grösse und Achsenrichtung an.

Gleichung (49) folgt übrigens aus Gleichung (20) unabhängig von der besonderen Bedeutung, die den Zeichen zukommt, falls nur $\mathfrak{r}$ einen Radiusvector vorstellt. — Setzen wir den nun für $\mathfrak{u}$ gefundenen Werth rückwärts in Gleichung (20) ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \tfrac{1}{2}\mathrm{V}\operatorname{curl}\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r} \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

als Bedingungsgleichung, der $\mathfrak{v}$ genügen muss, wenn es sich durch Gleichung (20) darstellen lassen soll, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als Bedingungsgleichung dafür, dass der Vector $\mathfrak{v}$ durch die Geschwindigkeiten der materiellen Punkte eines starren Körpers zur Darstellung gebracht werden kann.

Nebenbei sei hier auch noch die div der Vectoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ gebildet; man findet leicht

$$\operatorname{div}\mathfrak{r} = 3; \quad \operatorname{div}\mathfrak{v} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

Die letzte Gleichung kann übrigens schon als unmittelbare Folgerung der für die div eines Vectors in § 20 gegebenen geometrischen Deutung ohne jede Rechnung angeschrieben werden.

§ 24. Die Operation $(\mathfrak{a}\nabla)$ an einem Vector.

Für den schon aus § 19 bekannten Operator $(\mathfrak{a}\nabla)$ gilt auch hier, wo er auf einen Vector bezogen werden soll, die durch Gleichung (38) festgesetzte Definition:

$$\mathfrak{a}\nabla = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}.$$

Er ist hiernach ein scalarer Operator, der nach § 14 an jeder Componenten des Vectors für sich auszuführen ist. Wir erhalten daher

$$(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\cdot(\mathfrak{a}\nabla)A_1 + \mathfrak{j}\cdot(\mathfrak{a}\nabla)A_2 + \mathfrak{k}\cdot(\mathfrak{a}\nabla)A_3. \qquad (52)$$

Um die Bezugnahme auf ein Coordinatensystem zu umgeben, forme ich diesen Ausdruck weiter um. Aus Gleichung (40) S. 40 und Gleichung (23) S. 27 folgt

$$\mathfrak{i}\cdot(\mathfrak{a}\nabla)A_1 = \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{a}\nabla A_1 = \nabla A_1\cdot a_1 + V\mathfrak{a}V\mathfrak{i}\nabla A_1 \qquad (53)$$

Dieselbe Umformung ist auch auf jedes der beiden anderen Glieder anzuwenden. Zieht man dann zusammen, so kann man für

$$\nabla A_1\cdot a_1 + \nabla A_2\cdot a_2 + \nabla A_3\cdot a_3$$

zur Abkürzung $\nabla_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}\mathfrak{a})$ schreiben. Der Zeiger $\mathfrak{A}$ an $\nabla_{\mathfrak{A}}$ gibt hier an, dass die Operation ∇ partiell an dem scalaren Producte $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ ausgeführt werden muss, so nämlich, dass nur $\mathfrak{A}$ und nicht zugleich $\mathfrak{a}$ als veränderlich mit dem Orte betrachtet werden darf.

Für die Zusammenziehung der drei anderen Glieder machen wir von einer Formel Gebrauch, die sich leicht aus der Definitionsgleichung des curl in Gleichung (43) ableiten lässt. Man hat nämlich

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathfrak{A} &= V\nabla\mathfrak{A} = V\nabla(\mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3) = V\nabla\mathfrak{i}A_1 + V\nabla\mathfrak{j}A_2 \\ &\quad + V\nabla\mathfrak{k}A_3 = -V\mathfrak{i}\nabla A_1 - V\mathfrak{j}\nabla A_2 - V\mathfrak{k}\nabla A_3 \quad . \qquad (54)\end{aligned}$$

Bei dem Uebergange zur letzten Form ist dabei der Operator ∇ so wie ein gewöhnlicher Vector behandelt und in Folge der Vertauschung der Vectorfactoren im Vectorproducte daher das Vorzeichen gewechselt worden. Ganz zuverlässig ist dieses Verfahren nicht; man überzeugt sich aber nachträglich leicht von der Richtigkeit des gefundenen Resultats, indem man die Glieder nach den gewöhnlichen Rechenvorschriften einzeln entwickelt.

Setzt man dies ein, so geht Gleichung (52) über in

$$(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A} = \nabla_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{A}\mathfrak{a}) + V\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{a} \quad . \; . \; . \quad (55)$$

Die geometrische Bedeutung der Operation $\mathfrak{a}\nabla$ tritt erst klar hervor, wenn wir voraussetzen, dass $\mathfrak{a}$ ein constanter Einheitsvector sei. Bei der Anwendung der Operation trifft dies häufig oder sogar gewöhnlich zu. Der Vergleich von Gleichung (52) mit Gleichuug (41) lehrt uns dann sofort, dass $(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A}$ die auf die Längeneinheit bezogene Aenderung von $\mathfrak{A}$ für eine Verschiebung in der Richtung $\mathfrak{a}$ bedeutet. Denn die Componenten von $(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A}$ in Gleichung (52) geben nach Gleichung (41), in der $\mathfrak{r}_1$ dieselbe Bedeutung hat wie hier $\mathfrak{a}$, die Aenderungen der Componenten von $\mathfrak{A}$ unmittelbar an. Mit anderen Worten heisst dies, dass die Operation $(\mathfrak{a}\nabla)$, falls $\mathfrak{a}$ ein constanter Einheitsvector ist, eine Differentiation nach der Richtung $\mathfrak{a}$ bedeutet.

Die Differentiation $\partial/\partial x$ u. s. f. nach einer Coordinatenachse ist hiernach nur ein specieller Fall der Operation $(\mathfrak{a}\nabla)$ und zwar ist

$$\frac{\partial}{\partial x} = (\mathfrak{i}\nabla).$$

Tritt dagegen an die Stelle des constanten Einheitsvectors irgend ein anderer Vector, der jetzt zum Unterschiede mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden mag, so setze man $\mathfrak{B} = B\cdot\mathfrak{a}$, wo jetzt $\mathfrak{a}$ ein Einheitsvector ist, der mit $\mathfrak{B}$ an jener Stelle des Raumes, für die wir $(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A}$ berechnen wollen, gleichgerichtet, sonst aber constant ist. Dann ist

$$(\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} = B\cdot(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A},$$

also gleich dem mit dem Tensor von $\mathfrak{B}$ multiplicirten Differentialquotienten von $\mathfrak{A}$ nach der Richtung von $\mathfrak{B}$.

§ 25. Das Raum-Differential eines Vectors.

Die unendlich kleine Aenderung $d\mathfrak{A}$, die ein stetig im Raume vertheilter Vector $\mathfrak{A}$ bei einer unendlich kleinen Verrückung des Punktes erfährt, auf den er sich bezieht, lässt sich nach Gleichung (27) immer leicht durch die Differentialien der Componenten ausdrücken, also

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\,dA_1 + \mathfrak{j}\,dA_2 + \mathfrak{k}\,dA_3.$$

Dafür kann aber nach den Untersuchungen des vorhergehenden § stets auch ein anderer Ausdruck gesetzt werden, der von der Bezugnahme auf ein bestimmtes Coordinatensystem frei ist. Versteht man nämlich jetzt unter $\mathfrak{a}$ die unendlich kleine Verschiebung jenes Punktes, so ist das zugehörige $d\mathfrak{A}$ hiernach

$$d\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A} = \nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{a} + V \operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a},$$

Für einen unendlich kleinen Bezirk in der Nachbarschaft des Punktes O, für den $\mathfrak{A}$ den Werth $\mathfrak{A}_0$ annimmt, hat man daher bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{a} + V \operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a} \quad . \; . \; . \quad (56)$$

Diese Gleichung hat dieselbe Bedeutung für $\mathfrak{A}$ wie die Entwickelung einer Function $f(x)$ für ein unendlich kleines x nach dem Taylor'schen Satze in $f(x) = f(0) + f'(0)\,dx$. Auch unabhängig von der hier gegebenen Ableitung kann man den Nachweis für ihre Gültigkeit durch unmittelbare Entwickelung der einzelnen Glieder nach den für sie gegebenen Rechenvorschriften führen und es zeigt sich dann, dass Gleichung (56) in der That auf eine Entwickelung nach dem Taylor'schen Satze für drei unabhängige Veränderliche hinauskommt.

§ 26. Anwendung auf die Hydrodynamik.

Man denke sich $\mathfrak{A}$, so wie es in § 21 angegeben wurde, hydrodynamisch construirt, so also, dass es die Geschwindigkeit in einer Flüssigkeit nach Grösse und Richtung angibt.

Nach Verlauf eines Zeitelementes dt hat sich der materielle Punkt, der erst in O war, um die Strecke $\mathfrak{A}dt$ verschoben. Die Verschiebung des Punktes, der sich zuerst am Ende der unendlich kleinen Strecke $\mathfrak{a}$ befand, beträgt dann $(\mathfrak{A} + d\mathfrak{A})dt$. Der Theil $d\mathfrak{A}\, dt$ hiervon gibt die Verschiebung $d\mathfrak{a}$ des einen Punktes relativ zum andern an. Nach Gleichung (56) ist

$$d\mathfrak{a} = dt(\nabla_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{A}\mathfrak{a}) + \mathrm{V}(\mathrm{curl}\, \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a})) \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Der Bewegungszustand in der Umgebung des Punktes O lässt sich dadurch charakterisiren, dass man die Bewegung in 3 Componenten zerlegt. Diese Zerlegung kann nun in verschiedener Weise erfolgen. Die blosse Zerlegung in 3 Componenten nach den Coordinatenachsen, wie sie zum Zwecke der Cartesischen Darstellungsweise erfolgt, hat immer etwas Willkürliches und gibt keinen unmittelbaren Einblick in das Wesen der Sache. Hr. H. v. Helmholtz hat deswegen neben dieser Zerlegung, die er anwenden musste, um das Problem mit den Hülfsmitteln der gewöhnlichen Analysis verfolgen zu können und die nur als ein Rechenbehelf anzusehen ist, eine andere angewendet, durch die es ihm in seiner berühmten Abhandlung über die Wirbelbewegungen gelang, die Hydrodynamik mächtig zu fördern. In einer Polemik, die sich an diese Abhandlung knüpfte, suchte der französische Physiker Bertrand die Berechtigung der v. Helmholtz'schen Zerlegung, die ihm willkürlich erschien, zu bekämpfen. Wenn dieser Widerspruch schliesslich auch verstummen musste, so ist sein Auftreten doch immerhin erklärlich genug: die Verquickung der rationellen Zerlegung, wie sie v. Helmholtz gab, mit der dem eigentlichen Wesen der Sache fremden Zerlegung nach drei Coordinatenachsen, führte fast mit Nothwendigkeit zu solchen Zweifeln. Bei einer Darstellung des Vorgangs mit den Hülfsmitteln der Vector-Analysis wird diesen von vornherein jeder Boden entzogen und die Grössen, um die es sich handelt, werden ebenfalls von vornherein in ihrer wahren physikalischen Bedeutung erkannt.

Die Entwickelungen des vorigen §, die zu der Gleichung (56) führten, geben eine Art der Zerlegung des Vectors $\mathfrak{A}$ in der Nachbarschaft des Punktes O an, die frei von jeder Bezugnahme auf ein willkürliches Coordinatensystem ist und daher an sich wohl als eine rationelle zu betrachten ist. Hier aber, wo es sich um die Anwendungen in der Hydrodynamik handelt, ist ihr eine andere weit vorzuziehen.

Am natürlichsten erscheint es nämlich, aus der Gesammtbewegung $\mathfrak{A}$, zuerst eine solche abzuspalten, bei der sich die Flüssigkeit wie ein starrer Körper bewegt, während der Rest nur durch die Gestaltänderung der Flüssigkeit bedingt ist. Mit dem Verschwinden dieses Restes muss also eine Bewegung ohne Formänderung übrig bleiben. Wollte man nun etwa das erste und dritte Glied des Ausdrucks von $\mathfrak{A}$ in Gleichung (56) für den ersten und das zweite Glied für den zweiten dieser Bewegungsantheile in Anspruch nehmen, so würde man sofort erkennen, dass beim Verschwinden des zweiten Gliedes die Gleichung (56) die in Gleichung (50) S. 48 aufgestellte Bedingungsgleichung, der die Geschwindigkeiten in einem starren Körper genügen müssen, nicht erfüllt.

Dieser Bedingung genügt dagegen die Zerlegung in die folgenden 3 Componenten

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \quad \ldots \ldots \quad (58)$$

worin

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2} V(\operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a}) \quad \ldots \ldots \quad (58^a)$$

und daher nach Gleichung (56)

$$\mathfrak{C} = \tfrac{1}{2} V(\operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a}) + \nabla_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{A}\mathfrak{a}) \quad \ldots \quad (58^b)$$

ist. Zunächst ist nämlich durch den Vergleich mit Gleichung (50) sofort festzustellen, dass die Bewegungsantheile $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}$ eine Bewegung ohne Formänderung richtig wiedergeben, wenn $\mathfrak{C}$ verschwindet. Denken wir uns ferner irgend eine Veränderung in dem Werthe des Antheils $\mathfrak{C}$ vorgenommen, die mit der Definitionsgleichung (58^b) verträglich ist, womit auch der ganze Vector $\mathfrak{A}$ eine Veränderung erleidet, so hat dies weder auf $\mathfrak{A}_0$ noch auf $\mathfrak{B}$ irgend einen Einfluss. Der Ausdruck für $\mathfrak{B}$ in (58^a) enthält allerdings das von der Veränderung berührte $\mathfrak{A}$ und daher implicit $\mathfrak{C}$. Explicit lässt sich dies dadurch erkenntlich machen, dass man für (58^a) nach Einsetzen von $\mathfrak{A}$ aus (58) schreibt

$$\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2} V(\operatorname{curl}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{a}) + \tfrac{1}{2} V(\operatorname{curl}\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{a}).$$

Der curl von $\mathfrak{C}$, der in dieser Gleichung vorkommt, ist aber gleich Null.

Um diese wichtige Eigenschaft der Componenten $\mathfrak{C}$ nachzuweisen, bilde man zunächst den curl von $\nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{a}$. Dabei ist zu beachten, dass die Operation $\nabla_{\mathfrak{a}}$ an $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ sich auf ein constantes $\mathfrak{a}$ bezieht (vgl. die auf Gleichung (53) S. 49 folgenden Bemerkungen), während bei der Operation curl die Lage des Punktes $\mathfrak{a}$ selbst veränderlich ist. Aus

$$\nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{a} = \mathfrak{i}\left(a_1\frac{\partial A_1}{\partial x} + a_2\frac{\partial A_2}{\partial x} + a_3\frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{j}\left(a_1\frac{\partial A_1}{\partial y} + a_2\frac{\partial A_2}{\partial y} + a_3\frac{\partial A_3}{\partial y}\right) + \mathfrak{k}(\ldots)$$

erhält man

$$\operatorname{curl}\nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{a} = \mathfrak{i}\left\{\partial/\partial y\left(a_1\frac{\partial A_1}{\partial z} + a_2\frac{\partial A_2}{\partial z} + a_3\frac{\partial A_3}{\partial z}\right) - \partial/\partial z\left(a_1\frac{\partial A_1}{\partial y} + a_2\frac{\partial A_2}{\partial y} + a_3\frac{\partial A_3}{\partial y}\right)\right\} + \mathfrak{j}(\ldots) + \mathfrak{k}(\ldots)\,.$$

Hierbei ist nun $\partial a_1/\partial y = 0$, $\partial a_2/\partial y = 1$ u. s. f. zu setzen, da, wie bereits bemerkt, die Lage des Punktes $\mathfrak{a}$ selbst veränderlich ist. Dadurch wird

$$\operatorname{curl}\nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{a} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial y}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial x}\right),$$

also, wie ein Vergleich mit Gleichung (45) S. 44 ergibt,

$$\operatorname{curl}\nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{a} = -\operatorname{curl}\mathfrak{A} \quad \ldots\ldots \quad (59)$$

Nimmt man nun von Gleichung (56) den curl und setzt den hier gefundenen Werth ein, so erhält man sofort

$$2\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \operatorname{curl} V(\operatorname{curl}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{a}) \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

Die beiden Gleichungen (59) und (60) sind auch unabhängig von dem Zwecke der hier durchgeführten Betrachtungen von Werth. Die erste gilt, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, auch für endliche Werthe des Radiusvector $\mathfrak{a}$, die zweite, da sie sich auf Gleichung (56) stützt, nur für unendlich kleine $\mathfrak{a}$. Wir wollen ihnen noch zwei weitere hinzufügen, die gelegentlich nützliche Verwendung bei den analytischen Umformungen finden können.

Bildet man nämlich den curl von $(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A}$ nach Gleichung (55) und setzt auf der rechten Seite die sich aus den Gleichungen (59) und (60) ergebenden Werthe ein, so erhält man

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A} = \operatorname{curl}\mathfrak{A},$$

die indessen wiederum nur für unendlich kleine $\mathfrak{a}$ anwendbar ist.

Für endliche $\mathfrak{a}$ tritt an ihre Stelle

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A} = \operatorname{curl}\mathfrak{A} + (\mathfrak{a}\nabla)\operatorname{curl}\mathfrak{A} \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Man überzeugt sich von der Gültigkeit dieser Gleichung leicht durch Entwickelung der einzelnen Glieder, wobei man wie bei der Ableitung von Gleichung (59) auf die Werthe zu achten hat, die den partiellen Differentialquotienten der Componenten von $\mathfrak{a}$ mit Rücksicht darauf zukommen, dass $\mathfrak{a}$ auf jeden Fall ein Radiusvector sein soll.

Um die oben aufgestellte Behauptung über die Eigenschaft von $\mathfrak{C}$ zu beweisen, genügt es jetzt, den curl von Gleichung (58^b) zu nehmen und die aus (59) und (60) hervorgehenden Werthe für die einzelnen Glieder einzusetzen. Man erhält dann sofort

$$\operatorname{curl}\mathfrak{C} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Damit ist aber zugleich der Nachweis geliefert, dass bei der in der Gleichung (58) vorgenommenen Zerlegung der Geschwindigkeit $\mathfrak{A}$ in der Flüssigkeit das dritte Glied $\mathfrak{C}$ nichts zur Bewegung ohne Formänderung beiträgt, dass es also die Formänderungsbewegung ausschliesslich in sich begreift, während die beiden ersten Glieder ausschliesslich den von der Formänderung unabhängigen Ortswechsel darstellen.

Wir haben früher in Gleichung (50) die Bedingung aufgestellt, der die Geschwindigkeit in einem starren Körper genügen muss. Wir können ihr hier noch eine andere (64) und ebenso der in (62) für die durch das Glied $\mathfrak{C}$ dargestellte Bewegung eine zweite (63) zur Seite stellen. Zu diesem Zwecke denke ich mir die Bewegung $\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}$ zuerst ausgeführt, so dass sie bereits erledigt ist und betrachte dann die ihr zuzufügende Formänderungsbewegung $\mathfrak{C}$ ohne Ortswechsel des Flüssigkeitsbezirks im Ganzen. Betrachten wir die Bewegung $\mathfrak{C}$ isolirt, so ist für diese Bewegung jetzt $\mathfrak{C}$ an die Stelle von $\mathfrak{A}$ getreten; die Gleichungen (58), (58[a]), (58[b]) behalten auch jetzt noch ihre Gültigkeit für den vorliegenden Fall bei, wenn man in ihnen $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{C}$ ersetzt. Gleichung (58[a]) ergibt für $\mathfrak{B}$ mit Benutzung von Gleichung (62) folgerichtig den Werth Null; Gleichung (58[b]) geht dagegen über in

$$\mathfrak{C} = \nabla_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}\mathfrak{a}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Ebenso ergibt sich für $\mathfrak{B}$ die weitere Bedingungsgleichung aus (58[b])

$$\mathfrak{B} = -\nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{B}\mathfrak{a}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Während die Geschwindigkeitscomponente $\mathfrak{C}$, wie sich zeigte, die Bedingung erfüllt, dass ihr curl Null ergibt, gilt dies bei $\mathfrak{B}$ von der div (vgl. Gleichung 51). Für die div von $\mathfrak{C}$ kann man aus Gleichung (63) leicht die Gleichung ableiten

$$\operatorname{div}\mathfrak{C} = \mathfrak{a}\nabla^2\mathfrak{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

Das Operationszeichen ∇^2 findet seine Besprechung in den folgenden § §. Eine Bewegung, für die curl $\mathfrak{B}$ und daher auch $\mathfrak{B}$ selbst überall gleich Null ist, erfüllt daher ebenfalls Gleichung (65). Zu einer Gleichung von dieser Form lässt sich aber, wie sich später zeigen wird, immer leicht eine Integralgleichung angeben. Desshalb sind die „wirbelfreien" Flüssigkeitsbewegungen der analytischen Behandlung leichter zugänglich und wurden vor der v. Helmholtz'schen Abhandlung fast ausschliesslich untersucht.

§ 27. Die Operation ∇^2.

Fasst man den Operator ∇ als eine Vectorgrösse auf, so geht ∇^2 daraus nach den Regeln der scalaren Productbildung hervor. Wir setzen hiernach

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

d. h. ∇^2 ist der nach Laplace benannte Operator. Er ist ein scalarer Operator und liefert bei Anwendung auf einen Scalar wieder einen Scalar, bei Anwendung auf einen Vector wieder einen Vector.

Betrachten wir zunächst die Ausführung der Operation an einem Scalar. Nach (66) ist

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Man kann sich dies dadurch entstanden denken, dass man aus A zunächst den Vector ∇A ableitet und dann an diesem die Operation ∇ scalar vornimmt, d. h. also die div davon bildet. Man hat daher auch

$$\nabla^2 A = \operatorname{div} \cdot \nabla A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

Die Frage liegt hier nahe, was man erhält, wenn die zweite Operation ∇ nach Vector-Art an ∇A ausgeführt wird, d. h. wenn man den curl davon nimmt. Durch Entwickelung nach den für ∇ und curl gegebenen Rechenvorschriften erhält man sofort

$$\operatorname{curl} \nabla A = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Die Operation ∇^2 lässt daher von vornherein nur eine Deutung zu, wenn sie an einem Scalar vorgenommen werden soll.

Anders ist es bei einem Vector. Nimmt man die Operation ∇ zunächst einmal an diesem vor, so erhält man bei scalarer Ausführung die div, bei der nach Vector-Art den curl. Die zweite Operation ∇ liefert dann von div nur ein Resultat: ∇ div; vom curl kann dagegen ∇ wieder auf zwei Arten genommen werden, so dass man entweder div curl oder curl curl erhält. Im Ganzen würden wir daher, je nach den näheren Vorschriften, wie die Operation ∇ jedesmal an den Vector-Operanden vollzogen werden soll, drei von einander verschiedene Resultate erhalten können.

Wir werden uns sofort näher mit diesen 3 Werthen beschäftigen. Mit keinem von ihnen fällt indessen ∇^2 zusammen. Dies liegt daran, dass, wenn wir ∇ als einen fingirten Vector ansehen, $\nabla^2\mathfrak{A}$ auf $\nabla\nabla\cdot\mathfrak{A}$ hinauskommt, was durchaus von $\nabla\cdot\nabla\mathfrak{A}$ u. s. w. verschieden ist (vgl. § 11).

Die Differentiationen, aus denen sich ∇^2 zusammensetzt, sind, wie die Definitionsgleichung (66) zeigt, rein scalar. Solche sind aber (vgl. § 14) dadurch auszuführen, dass man sie an jeder Componente des Vectors für sich ausführt. Man hat daher

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\mathfrak{A} &= \mathfrak{i}\nabla^2 A_1 + \mathfrak{j}\nabla^2 A_2 + \mathfrak{k}\nabla^2 A_3\\ &= \mathfrak{i}\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)+\mathfrak{j}\left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2}\right)+\mathfrak{k}(\ldots)\end{aligned}\right\}\quad(70)$$

Wenden wir uns jetzt zu den drei vorher erwähnten Werthen $\nabla\cdot\operatorname{div}\mathfrak{A}$, $\operatorname{div}\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{A}$ und $\operatorname{curl}^2\mathfrak{A}$, d. h. $\operatorname{curl}\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{A}$, so erhalten wir zunächst leicht die wichtige Gleichung

$$\operatorname{div}\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{A} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Bei der Ausführung der durch curl und div vorgeschriebenen Differentiationen an den Componenten von $\mathfrak{A}$ heben sich nämlich alle Glieder identisch gegeneinander fort.

Etwas ausführlicher sei hier die Ausrechnung von $\operatorname{curl}^2\mathfrak{A}$ vorgeführt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}^2\mathfrak{A} &= \mathfrak{i}\left\{\partial/\partial y\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)-\partial/\partial z\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\right\}\\ &+\mathfrak{j}\left\{\partial/\partial z\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)-\partial/\partial x\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right\}+\mathfrak{k}(\cdots)\end{aligned}$$

Für die $\mathfrak{i}$-Componente erhält man bei Auflösung der Klammern 4 Glieder, denen noch $\partial^2 A_1/\partial x^2$ einmal als positives und dann noch zugleich als negatives Glied angereiht werden kann. Diese 6 Glieder lassen sich aber dann wie folgt gruppiren:

$$\partial/\partial x\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2}\right)$$

oder mit anderen Zeichen

$$\partial/\partial x\cdot\operatorname{div}\mathfrak{A}-\nabla^2 A_1$$

Die entsprechenden Umformungen lassen sich auch mit den $\mathfrak{j}$- und $\mathfrak{k}$-Componenten vornehmen, so dass schliesslich $\operatorname{curl}^2\mathfrak{A}$ übergeht in

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}^2\mathfrak{A}&=\mathfrak{i}(\partial/\partial x\operatorname{div}\mathfrak{A}-\nabla^2 A_1)+\mathfrak{j}(\partial/\partial y\operatorname{div}\mathfrak{A}-\nabla^2 A_2)\\&\quad+\mathfrak{k}(\partial/\partial z\operatorname{div}\mathfrak{A}-\nabla^2 A_3)\\&=\nabla\cdot\operatorname{div}\mathfrak{A}-\nabla^2\mathfrak{A}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(72)\end{aligned}$$

Durch diese Entwickelung sind wir zugleich zu dem dritten Werthe $\nabla\cdot\operatorname{div} a$, um den es sich noch handeln könnte, gelangt. Die wichtige Gleichung (72) zeigt, in welchem Zusammenhange die Operation ∇^2 mit den Operationen steht, die durch zweimalige Anwendung der Operation ∇ an einem Vector hervorgehen.

Schliesslich sei noch auf eine interessante Beziehung zwischen Gleichung (72) und Gleichung (23) S. 27 hingewiesen. Ersetzen wir nämlich curl durch die Schreibweise $V\nabla$ und div durch ∇, so lautet Gleichung (72)

$$V\nabla V\nabla\mathfrak{A}=\nabla\cdot\nabla\mathfrak{A}-\nabla\nabla\cdot\mathfrak{A}$$

und hier kann sie als unmittelbare Folgerung aus Gleichung (23) angesehen werden, wenn man den Operator ∇ so wie einen Vector behandelt. Natürlich kann dieser Hinweis den vorher gegebenen directen Beweis für Gleichung (72) nicht ersetzen; er zeigt vielmehr nur, dass man im vorliegenden Falle in der That berechtigt gewesen wäre, auf die Verknüpfung des Operators ∇ mit anderen Vectoren die für die Verknüpfung gewöhnlicher Vectoren unter sich gültigen Rechengesetze anzuwenden.

Aus Gleichung (72) lässt sich übrigens auch sofort schliessen, dass ∇^2 eine Operation ist, die von dem gewählten Coordinatensysteme unabhängig ist, da dies von den übrigen Operationen, die in dieser Gleichung vorkommen, schon früher erkannt war. — Auch direct kann dies mit Hülfe der in § 9 erörterten Coordinaten-Transformation leicht bewiesen werden.

§ 28. Verbindung mehrerer Operationen mit einander.

In den vorhergehenden §§ sind alle wichtigeren Differential-Operationen der Vector-Analysis erörtert worden. Es unterliegt daher keiner Schwierigkeit, nach den gegebenen Regeln auch mehrere Operationen hintereinander vorzunehmen. Zur Erleichterung für die Ausführung solcher Rechnungen dient es aber, wenn man einige häufiger vorkommende Verbindungen der Operatoren ein für alle Mal betrachtet und sich die erhaltenen Resultate zur späteren Verwendung notirt. Im vorigen § ergab sich uns schon Gelegenheit, einige wichtige Formeln dieser Art aufzustellen.

Für alle Differential-Operationen gilt, wie sich schon zeigte, die Regel, dass sie an einer Vectorsumme ausgeführt werden, indem man sie an jedem Gliede vornimmt.

Für ein Product AB aus zwei Scalaren ergibt sich sofort

$$\nabla AB = A \cdot \nabla B + B \cdot \nabla A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

$$\mathfrak{C} \cdot \nabla AB = (\mathfrak{C}\nabla) \cdot AB = A \cdot (\mathfrak{C}\nabla) B + B \cdot (\mathfrak{C}\nabla A) \quad (74)$$

$$\nabla^2(AB) = A \cdot \nabla^2 B + 2\nabla A \cdot \nabla B + B \cdot \nabla^2 A \quad . \quad (75)$$

Es ist nur nöthig, die Operationen nach den für sie festgesetzten Regeln auszuführen, um sich von der Allgemeingültigkeit dieser Gleichungen zu überzeugen. Die Operationen curl und div lassen sich an dem Scalar AB überhaupt nicht ausführen; ebensowenig wie an dem scalaren Product $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ aus zwei Vectoren.

Für $\nabla \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ kann man setzen

$$\nabla \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \nabla A_1 B_1 + \nabla A_2 B_2 + \nabla A_3 B_3,$$

wobei sich jedes Glied nach (73) weiter entwickeln lässt. Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass die Operation ∇ in gewissen Fällen auch partiell ausgeführt werden muss. So kann man z. B. $\nabla\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ unter der Festsetzung bilden, dass nur $\mathfrak{A}$ als variabel, $\mathfrak{B}$ aber als constant anzusehen ist. Drückt man dies durch Beifügung des Zeigers $\mathfrak{A}$ am Operator ∇ aus, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \nabla\mathfrak{A}\mathfrak{B} &= \nabla_{\mathfrak{A}}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \nabla_{\mathfrak{B}}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} \\ \text{und}\qquad \nabla_{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}\mathfrak{B} &= B_1\cdot\nabla A_1 + B_2\cdot\nabla A_2 + B_3\cdot\nabla A_3 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (76)$$

Ein Beispiel für eine partielle Ausführung der Operation ∇ bildete bereits der in Gleichung (55) und den darauf folgenden vorkommende Ausdruck $\nabla_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}\mathfrak{a})$, bei dem sich nach ausdrücklicher Festsetzung die durch ∇ vorgeschriebenen Differentiirungen nur auf die Veränderlichkeit von $\mathfrak{A}$ bezogen, während $\mathfrak{a}$ als ein constanter Vector anzusehen war. — Uebrigens wird, wenn $\mathfrak{a}$, wie dort, ein einfacher Radiusvector ist,

$$\nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{a} = \mathfrak{A}.$$

Man kann daher auch Gleichung (56) ersetzen durch

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}_0 + \tfrac{1}{2}\nabla\mathfrak{A}\mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}\mathrm{V}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{a}) \quad . \quad . \quad (77)$$

wobei jetzt die Operation ∇ an $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ total auszuführen ist. Immer wenn dies geschieht, lässt sich auf $\nabla\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ Gleichung (69) anwenden. Man erhält also z. B.

$$\mathrm{curl}\,\nabla\mathfrak{A}\mathfrak{a} = 0$$

anstatt des in Gleichung (59) aufgestellten Werthes, der für eine partielle Ausführung der Operation ∇ ermittelt war.

An dem Producte $A\mathfrak{B}$ aus einem Scalar und einem Vector kann man die Operationen div und curl ausführen. Mit leichter Mühe leitet man hierfür die Formeln ab:

$$\mathrm{div}\,A\mathfrak{B} = A\cdot\mathrm{div}\,\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\cdot\nabla A, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

wofür man auch schreiben kann

$$\mathrm{div}\,A\mathfrak{B} = A\cdot\mathrm{div}\,\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\cdot A. \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

und

$$\mathrm{curl}\,A\mathfrak{B} = A\cdot\mathrm{curl}\,\mathfrak{B} + \mathrm{V}(\nabla A)\cdot\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Auch an dem Vectorproducte aus zwei Vectoren kann man die Operationen div und curl vornehmen. Da man hierdurch zu zwei Formeln von Wichtigkeit gelangt, sei diese Entwickelung hier etwas eingehender wiedergegeben, obschon auch sie gar keine Schwierigkeiten bereitet und daher ebensogut dem Leser überlassen werden könnte.

Aus

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{i}(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathfrak{j}(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathfrak{k}(A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

folgt

$$\operatorname{div} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{\partial}{\partial x}(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \frac{\partial}{\partial y}(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \frac{\partial}{\partial z}(A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

Löst man die Klammern auf und führt die Differentiationen der Producte aus, so erhält man im Ganzen 12 Glieder, die in der Weise geordnet werden sollen, dass zuerst die beiden mit dem Factor A_1, dann die mit A_2 u. s. f. genommen werden. So wird

$$\operatorname{div} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = A_1\left(\frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial y}\right) + A_2\left(\frac{\partial B_3}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial z}\right) + A_3\left(\frac{\partial B_1}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial x}\right)$$
$$+ B_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + B_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + B_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right).$$

Die drei Klammern in der ersten Zeile geben aber, wie man sich sofort überzeugt (nach Gleichung 45), die Componenten von curl $\mathfrak{B}$ mit gewechseltem Vorzeichen an, während die 3 Klammerwerthe in der zweiten Zeile ohne solchen Vorzeichenwechsel die Componenten von curl $\mathfrak{A}$ unmittelbar darstellen. Nach der Definition des scalaren Products hat man daher

$$\operatorname{div} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Auch die Gültigkeit dieser Formel lässt sich, wie früher die von Gleichung (72) dadurch vorhersehen, dass man das Zeichen div durch das ihm gleichwerthige ∇ ersetzt, dieses ∇ als einen Vector betrachtet und dann auf $\nabla V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ Gleichung (21) S. 25 zur Anwendung bringt. Dabei ist nur im Auge zu behalten, dass ∇ nach wie vor auf jeden Factor zu erstrecken ist, gleichgültig ob bei diesen Umformungen ∇ vor oder hinter den Factor zu stehen kommt. Man kommt dann leicht auf Formel (81). Man muss sich indessen hüten, in einer solchen Herleitung einen Beweis der Formel zu erblicken. Der Werth dieses Verfahrens besteht nur darin, dass es in manchen Fällen einen Wink über mögliche Umformungen vorhandener Ausdrücke zu geben vermag. — Ganz dieselben Bemerkungen beziehen sich auch auf die jetzt abzuleitende Formel, die aus Gleichung (23) hergeleitet werden könnte.

Wir haben

$$\begin{aligned}\operatorname{curl} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{i}\{\partial/\partial y(A_1 B_2 - A_2 B_1) - \partial/\partial z(A_3 B_1 - A_1 B_3)\} \\ + \mathfrak{j}\{\cdots\} + \mathfrak{k}\{\cdots\}\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung wollen wir zunächst nur die Differentiationen nach $\mathfrak{A}$ ausführen (bei constantem $\mathfrak{B}$); wir erhalten so, wenn wir die oben bei ∇ angewendete Schreibweise beibehalten $\operatorname{curl}_{\mathfrak{a}} V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Im Ganzen ist dann

$$\operatorname{curl} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \operatorname{curl}_{\mathfrak{a}} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \operatorname{curl}_{\mathfrak{b}} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad (82)$$

eine Formel, der sich übrigens eine gleichartige auch für die div zur Seite stellen liesse (in der That gaben die beiden Zeilen des vorher für $\operatorname{div} V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ entwickelten Ausdruckes nichts anderes als die partiellen Divergenzen nach $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an).

Nun haben wir zunächst für die $\mathfrak{i}$-Componente von $\operatorname{curl}_{\mathfrak{a}} V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, wenn wir $B_1\, \partial A_1/\partial x$ einmal als positives und zugleich als negatives Glied beifügen

$$B_1\frac{\partial A_1}{\partial x} + B_2\frac{\partial A_1}{\partial y} + B_3 \cdot \frac{\partial A_1}{\partial z} - B_1\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right).$$

In derselben Weise lassen sich auch die beiden anderen Componenten entwickeln. Wir erhalten so

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}_{\mathfrak{a}} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{i}\{\mathfrak{B}\cdot\nabla A_1 - B_1 \operatorname{div}\mathfrak{A}\} \\ + \mathfrak{j}\{\mathfrak{B}\cdot\nabla A_2 - B_2 \operatorname{div}\mathfrak{A}\} + \mathfrak{k}(\ldots)\end{aligned}$$

Für $\mathfrak{B}\cdot\nabla A_1$ kann man auch $(\mathfrak{B}\nabla)\, A_1$ schreiben, wobei nun die scalare Operation $\mathfrak{B}\nabla$ an A_1 auszuführen ist. Da aber jede scalare Operation an einem Vector dadurch ausgeführt wird, dass man sie an jeder Componenten vornimmt, hat man auch

$$(\mathfrak{B}\nabla)\cdot\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\cdot(\mathfrak{B}\nabla)A_1 + \mathfrak{j}\cdot(\mathfrak{B}\nabla)A_2 + \mathfrak{k}(\mathfrak{B}\nabla)A_3 .$$

Damit geht der vorige Werth über in

$$\operatorname{curl}_{\mathfrak{A}} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

Bei der Bildung von $\operatorname{curl}_{\mathfrak{B}} V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist zu beachten, dass $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ das negative von $V\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ ist und dass daher das vorige Bildungsgesetz zu benutzen ist, wenn nur die Vorzeichen umgekehrt werden. Im Ganzen wird daher schliesslich

$$\operatorname{curl} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\cdot\mathfrak{B} \quad (84)$$

wobei noch einmal daran erinnert werden mag, dass $\mathfrak{A}\nabla$ die Operation

$$A_1\,\partial/\partial x + A_2\,\partial/\partial y + A_3\,\partial/\partial z$$

bedeutet und die Aenderung angibt, die der dahinter stehende Werth bei einer Verschiebung um $\mathfrak{A}$ erleidet, falls man sich $\mathfrak{A}$ als eine unendlich kleine gerichtete Strecke vorstellen darf.

Mit leichter Mühe lässt sich auch in ähnlicher Weise die Formel ableiten

$$V(\operatorname{curl}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}\nabla)\cdot\mathfrak{A} - (B_1\nabla A_1 + B_2\cdot\nabla A_2 + B_3\cdot\nabla A_3),$$

wofür man auch mit Berücksichtigung der Gleichungen (76) schreiben kann

$$V(\operatorname{curl}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}\nabla)\cdot\mathfrak{A} - \nabla_{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

oder auch mit Berücksichtigung von Gleichung (83)

$$V(\operatorname{curl}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}) = \operatorname{curl}_{\mathfrak{A}} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} - \nabla_{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad . \quad (86)$$

Die Anwendung dieser Formeln gestattet in vielen Fällen, die Ausdrücke, mit denen man zu rechnen hat, zu vereinfachen oder sie auf eine für den gerade vorliegenden Zweck bequemere Form zu bringen.

Drittes Capitel.

Linien-, Flächen- und Raumintegrale. Das Potential.

§ 29. Das Linien-Integral eines Vectors.

Unter $\mathfrak{A}$ sei ein Vector verstanden, der für jeden Punkt eines Raumes eindeutig gegeben ist. Zwischen zwei Punkten P_0 und P_1 dieses Raumes sei ferner eine zusammenhängende gerade oder krumme Linie gezogen, von der irgend ein Zwischenpunkt mit P bezeichnet sei. Den Radiusvector von P_0 nach P nennen wir $\mathfrak{r}$ und das auf P folgende Linienelement $d\mathfrak{s}$, wobei auch $d\mathfrak{s}$ als eine Vectorgrösse aufzufassen ist, deren Tensor ds ist. Nach § 15 ist dann

$$d\mathfrak{r} = d\mathfrak{s}.$$

Aus dem Vector $\mathfrak{A}$ im Punkte P und dem Elemente $d\mathfrak{s}$ bilde man das scalare Product und betrachte die dadurch gewonnene scalare, unendlich kleine Grösse als Element eines Integrals, das über die ganze Linie $P_0 P_1$ zu erstrecken ist. Dieses Integral

$$J_{0,1} = \int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{A} d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

wird das Linienintegral des Vectors $\mathfrak{A}$ genannt.

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Werth des Integrals $J_{0,1}$ abhängig oder unabhängig von dem Integrationswege, d. h. von der speciellen Wahl der von P_0 nach P_1 gezogenen Linie ist. Es hängt von der Art der Vertheilung des Vectors $\mathfrak{A}$ in dem gegebenen Raume ab, welcher von diesen beiden Fällen eintritt.

Ist $J_{0,1}$ unabhängig vom Integrationswege, so ist das Linienintegral über eine geschlossene Curve, die von P_0 über P_1 geht und dann nach P_0 zurückkehrt, gleich Null, denn für die beiden Theile, in die der Integrationsweg durch den Punkt P_1 getheilt wird, hat $J_{0,1}$ denselben Werth, das ganze Linienintegral zerfällt aber in die beiden Theile $J_{0,1}$ und $J_{1,0}$, von denen $J_{1,0}$ entgegengesetzt gleich mit $J_{0,1}$ für denselben Integrationsweg ist, da bei Umkehrung der Richtung von $d\mathfrak{s}$ das scalare Product $\mathfrak{A}d\mathfrak{s}$ sein Vorzeichen wechselt.

In diesem Falle ist ferner $J_{0,1}$ eine für jeden Punkt P_1 des betrachteten Raumes eindeutig bestimmte Grösse, wenn, wie hier stets vorausgesetzt war, dasselbe für $\mathfrak{A}$ zutrifft. Für den Punkt P_0 wird diese Grösse zu Null. Da die Wahl des Punktes P_0 willkürlich war, wollen wir, um zu einer allgemeinen Darstellung zu gelangen, eine neue Grösse V einführen, so dass

$$V = V_0 + J_{0,1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (88)$$

ist. V_0 ist für den ganzen Raum constant und gibt den Werth von V im Punkte P_0 an. Wählen wir nun irgend einen anderen Punkt P_2 als Anfangspunkt, so wird

$$V = V_0 + J_{0,2} + J_{2,0} + J_{0,1} = V_0 + J_{0,2} + J_{2,1}$$

oder wenn wir die constante Grösse $V_0 + J_{0,2}$, d. h. den Werth von V im Punkte 2 mit V_2 bezeichnen

$$V = V_2 + J_{2,1}.$$

Damit ist gezeigt, dass die scalare Grösse V für jeden Punkt des betrachteten Raumes bis auf eine additive Constante durch die Vertheilung des Vectors $\mathfrak{A}$ völlig bestimmt ist. Man nennt sie in der Theorie der Massenanziehung das zum Vector $\mathfrak{A}$ gehörige scalare Potential.

In der Theorie der elektrostatischen und der magnetischen Kräfte, bei denen eine Abstossung an Stelle der Anziehung tritt, ist man dagegen übereingekommen, das Negative des nach Gleichung (88) bestimmten Werthes von V als das Potential dieser Kräfte $\mathfrak{A}$ zu bezeichnen. — Gleichung (88) geht, wenn man die Vorzeichen von V und daher auch von V_0 umkehrt, über in

$$V = V_0 - J_{0,1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (88^a)$$

Auch hier können wir einen anderen Ausgangspunkt wählen und erhalten dann

$$V = V_0 - J_{0,2} - J_{2,0} - J_{0,1} = V_2 - J_{2,1}.$$

Diese veränderte Festsetzung des Vorzeichens hat den Zweck, in jedem Falle die Grösse V so zu definiren, dass sie bei passender Wahl der darin auftretenden Constanten in unendlicher Entfernung gleich Null gesetzt werden kann. In der Theorie der Gravitation sind die Kräfte $\mathfrak{A}$ von Orten niederen zu Orten höheren Potentials und in der Theorie der abstossenden Kräfte entgegengesetzt gerichtet.

Schreibt man Gleichung (88) in der Form an

$$J_{0,1} = V - V_0$$

oder Gleichung (88[a]) in der Form

$$J_{0,1} = -(V - V_0)$$

so sprechen sie aus, dass das Linienintegral, falls es in dem ganzen Raume von dem Integrationswege unabhängig ist, gleich dem positiv oder negativ genommenen Potentialunterschiede zwischen Anfangs- und Endpunkt ist.

§ 30. Der Satz von Stokes.

Es sei jetzt eine solche Vertheilung des Vectors $\mathfrak{A}$ angenommen, dass das Linienintegral $J_{0,1}$ (Gleichung 87) für verschiedene Integrationswege verschieden ausfällt. Erstrecken wir es über eine geschlossene Curve, so nimmt es jetzt einen von Null verschiedenen Werth an. Wir wollen diesen Werth näher ermitteln, zunächst unter der Voraussetzung, dass die geschlossene Curve eben ist und ein Flächenstück df von unendlich kleinen Abmessungen umschliesst.

Innerhalb des Flächenstückes oder auf der Curve selbst wählen wir einen Anfangspunkt, von dem wir die unendlich kleinen Radienvectoren $\mathfrak{a}$ zählen. Wenn $\mathfrak{A}$ im Anfangspunkte selbst den Werth $\mathfrak{A}_0$ annimmt, kann es innerhalb des unendlich kleinen Bezirks, den wir betrachten (vorausgesetzt, dass es sich überall in demselben continuirlich ändert) bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung durch eine der in den Gleichungen (56) oder (77) gegebenen Entwicklungen dargestellt werden. Wir wählen die letzte*) und erhalten für das über die ganze Curve erstreckte Linienintegral J

$$J = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{a}_0}^{\mathfrak{a}_0} (\mathfrak{A}_0 + \nabla \mathfrak{A} \mathfrak{a} + \mathrm{V}(\operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a}))\, d\mathfrak{a}\,.$$

Nun ist zunächst $\int \mathfrak{A}_0 d\mathfrak{a} = 0$, da für die geschlossene Curve $\int d\mathfrak{a}$ gleich Null und der Factor $\mathfrak{A}_0$ constant ist. Für das zweite Glied gilt dasselbe, denn $\nabla \mathfrak{A} \mathfrak{a} \cdot d\mathfrak{a}$ ist nach Gleichung (36) das vollständige Differential der Grösse $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$, das daraus zwischen beliebigen Grenzen genommene Integral daher gleich der Differenz des Anfangs- und des Endwerthes von $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$. Für die geschlossene Curve wird dieser Theil des Integrals also auch zu Null. Es bleibt demnach nur das dritte Glied in der Klammer übrig. Hierfür wenden wir die in Gleichung (21) S. 25 ausgesprochene Umformung an und erhalten

$$J = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{a}_0}^{\mathfrak{a}_0} d\mathfrak{a}\, \mathrm{V}(\operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{a}) = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{a}_0}^{\mathfrak{a}_0} \operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot \mathrm{V}(\mathfrak{a} d\mathfrak{a})\,.$$

Setzen wir jetzt

$$\operatorname{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

und verstehen für die Folge unter $\mathfrak{B}$ den M i t t e l w e r t h des damit neu eingeführten Vectors für den in Frage stehenden unendlich kleinen Bezirk, so wird

$$J = \mathfrak{B} \cdot \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{a}_0}^{\mathfrak{a}_0} \mathrm{V}(\mathfrak{a} d\mathfrak{a})\,.$$

Das unter dem Integralzeichen stehende Element ist ein zu dem Flächenstücke df senkrecht stehender Vector. Nach § 7 wird ferner der Tensor von $\frac{1}{2}\mathrm{V}\mathfrak{a} d\mathfrak{a}$ durch die Fläche des Dreiecks angegeben, das von den Seiten $\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} + d\mathfrak{a}$ umschlossen wird oder mit andern Worten, dessen Spitze im

---

*) Wählt man die andere, so ist zu beachten, dass $\nabla_{\mathfrak{a}} \mathfrak{A} \mathfrak{a} d\mathfrak{a}$ kein vollständiges Differential bildet.

Anfangspunkte liegt und dessen Grundlinie das Linienelement $d\mathfrak{a}$ ist. Nun sind alle Vectoren $\mathrm{V}(\mathfrak{a}d\mathfrak{a})$ unter sich gleichgerichtet. Bei der durch das Integralzeichen vorgeschriebenen Summirung erhalten wir daher einen Vector, der ebenfalls und in derselben Richtung senkrecht zur Fläche df steht und dessen Tensor gleich der Summe aller jener Dreiecke, d. h. gleich der Fläche df ist. Bezeichnen wir also mit $\mathfrak{N}$ einen Einheitsvector, der senkrecht zu df steht, so dass die Aufeinanderfolge $\mathfrak{a}, d\mathfrak{a}, \mathfrak{N}$ zu einem Rechtssysteme im Raume führt, so erhalten wir schliesslich

$$J = df \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Das scalare Product $\mathfrak{B}\mathfrak{N}$ ist nichts anderes als die Projection des Vectors $\mathfrak{B}$ auf die zu df gezogene Normale $\mathfrak{N}$.

Nach dem bisher Bewiesenen sind wir zunächst im Stande, die Bedingung dafür anzugeben, dass der im vorigen § erörterte Fall vorliegt, dass nämlich $J_{0,1}$ vom Integrationswege unabhängig ist oder mit anderen Worten, dass sich der Vector $\mathfrak{A}$ aus einem Potentiale V ableiten lässt. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass überall in dem betrachteten Raume

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A} = 0$$

ist. Wir wollen eine Vertheilung des Vectors $\mathfrak{A}$, die dieser Bedingung genügt, eine wirbellose nennen, da bei der hydrodynamischen Construction des Vectors $\mathfrak{A}$ (§ 26) die Flüssigkeitsbewegung in diesem Falle wirbelfrei ist.

Nun können wir aber auch leicht den Ausdruck für das über eine geschlossene Curve von endlichen Dimensionen gebildete Linienintegral J ableiten. Zu diesem Zwecke lege man durch die gegebene Curve eine beliebige Fläche, so dass die gegebene Curve den Rand dieser Fläche bildet und zerlege durch zwei Schaaren von Linien die ganze Fläche in unendlich kleine Elemente (Abb. 8 auf folgender Seite). Man erkennt sofort, dass das Linienintegral J über die Randcurve gleich der Summe der Linienintegrale über die Umfänge aller Flächenelemente ist, wenn der Sinn der Umkreisung in jedem Falle mit dem der ganzen Fläche im Integral J übereinstimmt. Denn beim Zusammenziehen dieser Summe kommt jedes Linienelement der gezogenen Theilungslinien zweimal mit entgegengesetztem Vorzeichen und mit dem gleichen Factor $\mathfrak{A}$ behaftet vor, so dass sich alle Glieder bis auf die von den Elementen der Randcurve herrührenden gegeneinander fortheben.

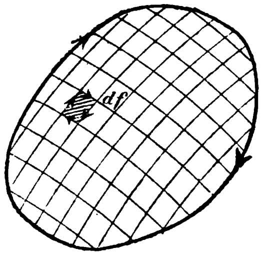


Abb. 8.

Es ist das, nebenbei bemerkt, dieselbe Flächenzerlegung, die man anwendet, um die Aequivalenz eines elektrischen Kreisstromes mit einer magnetischen Schale nach der Ampère'schen Theorie darzuthun.

Für das über den Rand jedes unendlich kleinen Flächenelementes erstreckte Linienintegral können wir aber den in Gleichung (89) gefundenen Ausdruck einsetzen; wir erhalten daher schliesslich

$$J = \int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{B}\mathfrak{N} \cdot df = \int \operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{N}\, df \quad . \quad . \quad (90)$$

Das Integral $\int \mathfrak{B}\mathfrak{N} \cdot df$ ist über die ganze, von dem Integrationswege des vorhergehenden Integrals umschlossene, im Uebrigen aber beliebig gezogene Fläche zu erstrecken. Es wird das Oberflächenintegral des Vectors $\mathfrak{B}$ über diese Fläche genannt.

Gleichung (90) spricht den Satz von Stokes aus.

Kommen in dem betrachteten Raume Unstetigkeitsstellen in der Vertheilung des Vectors $\mathfrak{A}$ vor, so sind sie in bekannter Weise auszuschliessen, bezw. zu umgehen.

§ 31. Das Linienintegral eines Scalars.

Ausser dem Linienintegrale eines Vectors, dessen Element ein scalares Product aus dem Linienelemente und dem gegebenen Vector bildet und das daher selbst zu einer scalaren Grösse führt, kommen, wenn auch seltener, noch zwei andere Linienintegrale bei den Anwendungen vor, die zu Vectoren führen.

Das hier jetzt zu behandelnde ist das Linienintegral eines Scalars, das wir uns von vornherein über eine geschlossene Curve ausgeführt denken wollen. Bezeichnen wir den Scalar mit A und das Integral mit $\mathfrak{J}$, so ist nach Definition

$$\mathfrak{J} = \int_{P_0}^{P_0} A\, d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

Falls A eine Constante ist, wird $\mathfrak{J}$ natürlich zu Null, da die Summe aller $d\mathfrak{s}$ für eine geschlossene Curve selbst Null ist. Im anderen Falle machen wir zur Berechnung von $\mathfrak{J}$ von dem Stokes'schen Satze Gebrauch. Allerdings kann dieser hier nicht unmittelbar zur Anwendung gelangen, da er sich auf das Linienintegral eines Vectors und nicht auf das eines Scalars bezieht. Ueber diese Schwierigkeit kommen wir indessen durch den Kunstgriff hinweg, dass wir die ganze Gleichung (91) mit einem constanten Vector $\mathfrak{c}$, den wir uns als Einheitsvector von beliebiger Richtung denken wollen, multipliciren. Wir erhalten dann

$$\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{c} = \oint_{P_0}^{P_0} (A\mathfrak{c})\, d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

$\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{c}$ ist dann die Componente von $\mathfrak{J}$ in der Richtung $\mathfrak{c}$ und es genügt zur Ermittelung von $\mathfrak{J}$ selbst offenbar vollkommen, wenn wir für jede Richtung $\mathfrak{c}$ die Componente anzugeben vermögen.

Nach dem Stokes'schen Satze erhalten wir aus Gleichung (92)

$$\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{c} = \int \operatorname{curl}(A\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{N}\, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

$\operatorname{curl}(A\mathfrak{c})$ lässt sich nach Gleichung (80) entwickeln; dabei ist zu beachten, dass $\mathfrak{c}$ hier constant, sein curl also Null ist. Daher ist

$$\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{c} = \int \mathfrak{N} \cdot \mathrm{V}(\nabla A)\mathfrak{c} \cdot df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

Hierauf lässt sich noch die bekannte Transformation Gleichung (21) anwenden, so dass sich $\mathfrak{J}\mathfrak{c}$ auch noch unter jeder der beiden folgenden Formen darstellen lässt

$$\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{c} = \int \nabla A \cdot \mathrm{V}\mathfrak{c}\mathfrak{R}\, df = \mathfrak{c} \int \mathrm{V}\mathfrak{R} \cdot \nabla A\, df \quad . \quad . \quad (95)$$

In der letzten Formel liess sich $\mathfrak{c}$ als constanter Factor vor das Integralzeichen setzen. Beachten wir nun, dass dieser Ausdruck für jede Richtung von $\mathfrak{c}$ gültig bleibt, so finden wir nun auch $\mathfrak{J}$ selbst, wenn wir beiderseits $\mathfrak{c}$ streichen.

$$\mathfrak{J} = \int \mathrm{V}\mathfrak{R} \cdot \nabla A\, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

Diese Gleichung bildet in jeder Hinsicht ein Analogon zur Gleichung (90), denn, wie aus der Definition von curl hervorgeht, lässt sich curl selbst durch $\mathrm{V}\nabla$ ersetzen. Führt man dies aus, so stimmen die beiden Gleichungen (90) und (96) den Zeichen nach fast völlig mit einander überein.

So wie in § 29 für das Linienintegral eines Vectors könnte man auch hier für das eines Scalars die Frage aufwerfen, bei welcher räumlichen Vertheilung von A das Linienintegral für jede geschlossene Curve verschwindet. Die Bedingung dafür ist offenbar

$$\nabla A = 0,$$

d. h. A muss eine Constante sein. In jedem anderen Falle kann man geschlossene Linien angeben, für die das Linienintegral von Null verschieden wird.

§ 32. Das Vectorlinienintegral eines Vectors.

Das andere Linienintegral, das gleichfalls zu einem Vector führt, entsteht dadurch, dass man von dem Linienelemente und dem gegebenen Vector nicht das scalare, sondern das Vectorproduct nimmt. Es wird also definirt durch die Gleichung

$$\mathfrak{K} = \int_{P_0}^{P_0} \mathrm{V}\mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

wobei das Integral jetzt zur Unterscheidung von dem vorigen Falle mit dem Buchstaben $\mathfrak{K}$ bezeichnet ist und sich ebenfalls auf eine geschlossene Curve erstreckt.

Auch hier wenden wir zur Ermittelung von $\mathfrak{K}$ denselben Kunstgriff an, wie im vorigen §, d. h. wir multipliciren mit einem constanten Vector $\mathfrak{c}$.

$$\mathfrak{K}\mathfrak{c} = \int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{c} V \mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \int_{P_0}^{P_0} d\mathfrak{s} V \mathfrak{c}\mathfrak{A}.$$

Bei der letzten Umformung war wieder Gleichung (21) zu beachten. Auf der rechten Seite haben wir aber jetzt ein gewöhnliches Linienintegral und zwar das des Vectors $V\mathfrak{c}\mathfrak{A}$ stehen. Man kann also den Stokes'schen Satz anwenden und erhält

$$\mathfrak{K}\mathfrak{c} = \int \operatorname{curl} V \mathfrak{c}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{N} df.$$

Den curl entwickeln wir nach den Gleichungen (82) und (83), wobei zu beachten ist, dass $\mathfrak{c}$ constant ist und dass daher der nach $\mathfrak{c}$ genommene curl des Vectorproductes verschwindet. Man erhält so

$$\mathfrak{K}\mathfrak{c} = \int \{ \mathfrak{c} \operatorname{div} \mathfrak{A} - (\mathfrak{c}\nabla)\mathfrak{A} \} \mathfrak{N} df \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

Dieser Ausdruck zerfällt zunächst in zwei Glieder und das zweite Glied lässt sich nach Gleichung (42) noch weiter umformen. Nach dieser Gleichung ist nämlich

$$(\mathfrak{c}\nabla)\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{c} \cdot \nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{N}) - \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{c}\nabla)\mathfrak{N},$$

womit der gefundene Werth übergeht in

$$\mathfrak{K}\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \left\{ \int \operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{N} df - \int \nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{N}) df \right\} + \int \mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{c}\nabla)\mathfrak{N} df \quad (99)$$

Für den besonderen Fall, dass das Linienintegral über eine ebene Curve erstreckt werden soll, und dass die Oberflächenintegrale über das von dieser Curve eingeschlossene ebene Flächenstück genommen werden, fällt das letzte Glied dieses Ausdrucks fort, da $\mathfrak{N}$ in diesem Falle eine Constante ist. **Unter dieser Voraussetzung** lässt sich auch $\mathfrak{K}$ selbst angeben und zwar ist es

$$\mathfrak{K} = \int (\mathfrak{N} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{N}))\,df \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Auch hier stellt sich wieder die wichtige Frage ein, unter welchen Umständen das Vectorlinienintegral über eine geschlossene ebene Curve verschwindet.

Falls dies nur für eine bestimmte Curve mit gegebener Richtung der Flächennormalen $\mathfrak{N}$ zutreffen soll, genügt es, wenn überall auf der Fläche

$$\mathfrak{N} \operatorname{div} \mathfrak{A} = \nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{N}) = N_1 \cdot \nabla A_1 + N_2 \cdot \nabla A_2 + N_3 \cdot \nabla A_3$$

ist, wobei $\nabla \mathfrak{A}\mathfrak{N}$ nach Gleichung (76) entwickelt ist.

Soll es dagegen für jede Curve zutreffen, so müssen, wenn wir $\mathfrak{N} \operatorname{div} \mathfrak{A}$ ebenfalls nach seinen Componenten entwickeln, die auf beiden Seiten mit denselben Componenten von $\mathfrak{N}$ behafteten Glieder einzeln einander gleich sein. Es muss also z. B.

$$\mathfrak{i} \operatorname{div} \mathfrak{A} = \nabla A_1$$

sein, oder wenn wir für $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ seinen Werth einsetzen

$$\mathfrak{i}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) = \mathfrak{i}\frac{\partial A_1}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial A_1}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial A_1}{\partial z}.$$

Dies führt zu

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = 0.$$

Schreibt man noch die entsprechenden Folgerungen aus der Gleichsetzung der mit N_2 und N_3 behafteten Glieder an, so **folgt, dass das Vectorlinienintegral von $\mathfrak{A}$ nur dann für jede geschlossene (ebene) Curve verschwinden kann, wenn $\mathfrak{A}$ eine Constante ist.**

§ 33. Das Oberflächenintegral eines Vectors.

Von dem Oberflächenintegral gilt Aehnliches wie vom Linienintegral. Legen wir, wie es in § 30 beschrieben war, durch eine gegebene Linie eine Fläche, über die das Integral erstreckt werden soll, so kann das Integral entweder abhängig oder unabhängig von der speciellen Wahl sein, die wir für diese Fläche getroffen haben. Es hängt dies von der Art der Vertheilung des Vectors ab, von dem das Integral zu bilden ist. — Das durch den Satz von Stokes eingeführte Oberflächenintegral des Vectors $\mathfrak{B}$ in Gleichung (90) ist auf jeden Fall unabhängig von der speciellen Wahl der Integrationsfläche (solange nur die Randcurve beibehalten wird), da es für jede derartige Fläche, die wir ziehen mögen, gleich dem Linienintegrale des Vectors $\mathfrak{A}$ über die Randcurve ist.

Wir können daraus sofort weiter folgern, dass das über eine geschlossene Fläche erstreckte Integral des Vectors $\mathfrak{B}$ gleich Null sein muss. Schliesst nämlich die Fläche einen einfach zusammenhängenden Raum ein, so können wir sie durch Ziehen einer in sich zurücklaufenden Linie in zwei getrennte Hälften spalten, so dass die Linie in dem früher erörterten Sinne eine Randcurve für jede Hälfte bildet. Nach dem Stokes'schen Satze, Gleichung (90), ist dann $\int \mathfrak{B}\mathfrak{N}\,df$ für jede Hälfte gleich gross. Hierbei bedeutet aber, je nach dem Umlaufssinn, den wir für das Umlaufen der gemeinsamen Randcurve bei der Bildung des Linienintegrals gewählt haben, $\mathfrak{N}$ in der einen Hälfte der Fläche die nach innen und in der anderen die nach aussen gerichtete Normale. Bilden wir also $\int \mathfrak{B}\mathfrak{N}\,df$ für die ganze Fläche und verstehen unter $\mathfrak{N}$ überall die nach innen (oder überall die nach aussen) gerichtete Normale, so heben sich die beiden gleich grossen und entgegengesetzt bezeichneten Antheile gegen einander weg. — Bei einem mehrfach, z. B. zweifach zusammenhängenden Raume legen wir ausser der als Randcurve dienenden Linie l noch einen Querschnitt q durch den Raum (Abb. 9), wodurch dieser in einen einfach zusammenhängenden verwandelt wird. Das Oberflächenintegral muss dann über den Querschnitt q in jedem

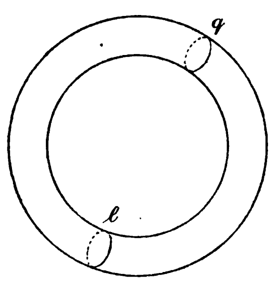


Abb. 9.

Falle miterstreckt werden, dabei heben sich aber die beiden auf q bezüglichen Glieder beim Summiren gegeneinander für sich fort, so dass der vorige Schluss unverändert bestehen bleibt.

Dies Alles gilt indessen nicht von dem Oberflächenintegrale eines beliebigen Vectors. Wenn nämlich auch $\mathfrak{A}$ in Gleichung (90) einen Vector von beliebiger Vertheilung bedeutete, so ist der daraus abgeleitete Vector $\mathfrak{B}$ doch nicht mehr ganz beliebig, d. h. man kann es nicht durch eine passende Wahl von $\mathfrak{A}$, obschon diese ganz frei steht, dahin bringen, dass $\mathfrak{B}$ eine vorher beliebig vorgeschriebene Vertheilung besitze.

Wir wollen daher, um die Eigenschaften des Oberflächenintegrals weiter zu untersuchen, jetzt annehmen, dass es von einem ganz beliebig vertheilten Vector $\mathfrak{A}$ genommen, und dass es von vornherein über eine geschlossene Fläche erstreckt werden soll. Den Raum, der von dieser Fläche eingeschlossen wird, können wir durch 3 Schaaren von Flächen in unendlich kleine Abschnitte theilen. Wie in § 30 erkennen wir dann sofort, dass das Oberflächenintegral über die den ganzen Raum umschliessende Fläche gleich der Summe der Oberflächenintegrale über die Mantelflächen aller Raumelemente ist, in die wir diesen Raum zerstückelt haben. Wir schliessen daraus weiter, dass das Oberflächenintegral durch ein über den ganzen umschlossenen Raum erstrecktes Raumintegral ersetzt werden kann, d. h. mit anderen Worten, dass es sich als eine Summe einzelner Elemente darstellen lässt, von denen jedem Raumelemente eines zugehört.

Die einfachste Theilung des eingeschlossenen Raumes ist die durch drei Schaaren auf einander senkrecht stehender Ebenen. Wir wollen diese Theilung wählen und da der Fall von selbst auf die Einführung eines Achsensystems hinführt, annehmen, dass die Ebenen parallel zu den Coordinatenebenen gehen. Ueber eines der gebildeten parellelepipedischen Raumelemente sei jetzt das Oberflächenintegral des beliebig (aber continuirlich) vertheilten Vectors $\mathfrak{A}$ erstreckt.

Die zur X-Achse senkrechte und dem Ursprung zunächst liegende Seitenfläche von der Grösse $dy\,dz$ liefert zum Oberflächenintegral, wenn wir unter $\mathfrak{N}$ überall die nach innen gerichtete Normale verstehen und dafür $\mathfrak{N}_i$ schreiben, den Beitrag $A_1\,dy\,dz$, da das scalare Product $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_i$ hier die X-Componente A_1 von $\mathfrak{A}$ ergibt. Für die gegenüber liegende Fläche wird dieser Beitrag gleich $-(A_1 + dA_1/dx \cdot dx)\,dy\,dz$. Das negative Vorzeichen folgt daraus, dass die nach innen gerichtete Normale bei dieser Seitenfläche der positiven X-Achse und daher der Richtung, in der A_1 positiv gezählt wird, entgegengesetzt ist. Die Summe beider Beiträge liefert $-dA_1/dx \cdot dx\,dy\,dz$. In derselben Weise lassen sich auch für die beiden anderen Paare gegenüber liegender Seitenflächen die Glieder ermitteln, die sie zum Oberflächenintegrale beitragen. Man erhält so für das Integral über die Oberfläche des betrachteten Raumelementes den Werth

$$-\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Da nun, wie wir sahen, das Integral über die Oberfläche des ganzen Raumes gleich der Summe der über die Oberflächen aller Raumelemente erstreckten Integrale ist, folgt mit Berücksichtigung dessen, dass der in dem angeschriebenen Ausdrucke vorkommende Klammerwerth die div des Vectors $\mathfrak{A}$ vorstellt (§ 21, Gleichung 44)

$$\int \mathfrak{A}\mathfrak{N}_i\,df = -\int \operatorname{div}\mathfrak{A} \cdot dv. \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (101)$$

wo dv zur Abkürzung für das Raumelement steht. Die Integrale sind über die ganze Oberfläche bezw. über den ganzen umschlossenen Raum, und wo Stetigkeitsunterbrechungen vorkommen auch über die diese umgehenden Flächen zu erstrecken.

Aus Gleichung (101) folgt nun auch ferner als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Oberflächenintegral von $\mathfrak{A}$ über ein Flächenstück auf ein Linienintegral über die Randcurve zurückgeführt werden kann:

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0.$$

Maxwell nennt diese Gleichung die solenoidale Bedingung, der man den Vector $\mathfrak{A}$ zu unterwerfen hat, damit sein Oberflächenintegral über eine geschlossene Fläche verschwinde. Die Bezeichnung erklärt sich daraus, dass bei der hydrodynamischen Construction des Vectors $\mathfrak{A}$ in diesem Falle ebensoviele Stromfäden oder bei der später zu besprechenden geometrisch-mechanischen Construction ebensoviele Kraftlinien in den von der Fläche umschlossenen Raum ein- als austreten, dass also der ganze Kraftfluss gewissermaassen in festen Rinnen erfolgt.

Dass der in § 30 eingeführte Vector $\mathfrak{B}$, der als curl von $\mathfrak{A}$ erhalten war, die solenoidale Bedingung stets erfüllt und dass daher sein Integral über eine geschlossene Fläche stets gleich Null ist (wie wir schon im Eingange dieses § durch eine besondere Betrachtung feststellen konnten), ergibt sich nun auch leicht aus Gleichung (71) S. 58.

§ 34. Das Oberflächenintegral eines Scalars.

Auch der Begriff des Oberflächenintegrals lässt sich, wie der des Linienintegrals, über den ursprünglichen hinaus ausdehnen, wodurch man wiederum zu bemerkenswerthen Ergebnissen geführt wird. Auch hier soll immer nur von dem über eine geschlossene Fläche ausgedehnten Integrale die Rede sein.

Das hier mit $\mathfrak{S}$ bezeichnete Oberflächenintegral eines Scalars wird durch die Gleichung definirt

$$\mathfrak{S} = \int A \mathfrak{N}_1 df,$$

in der A eine im ganzen Raume continuirlich veränderliche scalare Grösse bedeutet. Das Oberflächenintegral gibt, wie durch die Schreibweise angedeutet wird, einen Vector an. Es handelt sich darum, diesen Vector, ähnlich wie das Oberflächenintegral in Gleichung (101) auf ein Raumintegral zurückzuführen. Dazu wende ich denselben Kunstgriff an, der schon in den §§ 31 und 32 zur Lösung der entsprechenden

Aufgabe für das Linienintegral führte. Ich multiplicire also beide Seiten mit einem beliebigen constanten Vector $\mathfrak{c}$ und erhalte

$$\mathfrak{S}\mathfrak{c} = \int (\mathfrak{c}A)\,\mathfrak{N}_1 df.$$

Auf der rechten Seite steht jetzt das Oberflächenintegral des Vectors $\mathfrak{c}A$, das sich nach Gleichung (101) auf ein Raumintegral zurückführen lässt. Man erhält

$$\mathfrak{S}\mathfrak{c} = -\int \operatorname{div}(\mathfrak{c}A)\,dv.$$

Die div von $\mathfrak{c}A$ entwickele ich nach Gleichung (78), wobei zu beachten ist, dass div $\mathfrak{c}$ hier gleich Null ist, da $\mathfrak{c}$ constant ist. Demnach wird

$$\mathfrak{S}\mathfrak{c} = -\,\mathfrak{c}\int \nabla A dv$$

und, da diese Gleichung für jedes $\mathfrak{c}$ gelten muss, schliesslich

$$\mathfrak{S} = -\int \nabla A dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

die der Gleichung (100) in jeder Hinsicht analog ist und bei der Schreibweise $\nabla\mathfrak{A}$ für div $\mathfrak{A}$ fast buchstäblich mit ihr übereinstimmt.

Das Oberflächenintegral eines Scalars A wird dann und nur dann für jede beliebige geschlossene Fläche zu Null, wenn ∇A überall verschwindet, d. h. wenn A eine Constante ist.

§ 35. Das Vectoroberflächenintegral eines Vectors.

Ich betrachte ferner noch das durch die Gleichung

$$\mathfrak{T} = \int V \mathfrak{A}\mathfrak{N}_1 df$$

definirte und über eine geschlossene Fläche erstreckte Vectoroberflächenintegral eines Vectors. Um es auf ein Raumintegral zurückzuführen, verfahre ich wie vorher und erhalte der Reihe nach

$$\mathfrak{T}\mathfrak{c} = \int \mathfrak{c} \mathrm{V} \mathfrak{A} \mathfrak{N}_1 df = \int \mathfrak{N}_1 \mathrm{V} \mathfrak{c} \mathfrak{A} df,$$

ferner nach Anwendung von Gleichung (101)

$$\mathfrak{T}\mathfrak{c} = -\int \operatorname{div} \mathrm{V} \mathfrak{c} \mathfrak{A} dv,$$

also nach Gleichung (81), da $\mathfrak{c}$ constant ist,

$$\mathfrak{T}\mathfrak{c} = \int \mathfrak{c} \operatorname{curl} \mathfrak{A} dv = \mathfrak{c} \int \operatorname{curl} \mathfrak{A} dv$$

und, da dies für jedes beliebige constante $\mathfrak{c}$ zutreffen muss,

oder

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \int \operatorname{curl} \mathfrak{A} dv \\ \int \mathrm{V} \mathfrak{A} \mathfrak{N}_1 df &= \int \operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot dv \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \quad (103)$$

Wir erkennen daraus noch, dass das Vectoroberflächenintegral für jede geschlossene Fläche verschwindet, wenn $\operatorname{curl} \mathfrak{A} = 0$, also der Vector, von dem es genommen werden soll, im ganzen Raume wirbellos vertheilt ist, also gerade dann, wenn nach § 30, das Linienintegral dieses Vectors für jede geschlossene Linie ebenfalls verschwindet.

Gleichung (103) bildet insofern noch ein interessantes Gegenstück zu Gleichung (101), als diese das Raumintegral der div eines Vectors und Gleichung (103) das vom curl eines Vectors auf ein Oberflächenintegral über die den Raum einschliessende Fläche zurückzuführen lehrt.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass bereits in Gleichung (96) ein Vectoroberflächenintegral, nämlich das des Vectors ∇A eingeführt wurde, das allerdings nicht über eine geschlossene Fläche, sondern nur über ein Flächenstück zu erstrecken war und dem Linienintegrale des Scalars A gleichgesetzt werden konnte. Aus der Möglichkeit dieser Gleichsetzung folgt schon, dass jenes Oberflächenintegral für eine geschlossene Fläche verschwinden muss und wir finden dies in der That dadurch bestätigt, dass der Vector ∇A stets die oben genannte Bedingung erfüllt (vgl. Gleichung 69).

Eine Betrachtung derselben Art lehrt uns auch, weshalb es nicht möglich war, in § 32 das Vectorlinienintegral auf ein reines Oberflächenintegral eines Scalars (wie $\mathfrak{S}$ in § 34) zurückzuführen. Wenn dies möglich sein sollte, müsste nämlich das gesuchte Oberflächenintegral für eine geschlossene Fläche jedenfalls verschwinden, da es nur dann für alle durch die gegebene Curve gelegte Flächen zu demselben Werthe, nämlich zu dem des Vectorlinienintegrals führen könnte. Nach § 34 trifft dies aber nur dann zu, wenn der zugehörige Vector eine Constante ist. Im Allgemeinen ist aus diesem Grunde eine Transformation dieser Art für das Vectorlinienintegral nicht durchführbar.

§ 36. Das Potential.

Der durch Gleichung (101) ausgesprochene Satz nimmt eine für die Anwendungen häufig geschicktere Form an, wenn man ihn mit den Bemerkungen verbindet, durch die in § 29 der Begriff des Potentials eines Vectors $\mathfrak{A}$ eingeführt wurde. Allerdings verliert er bei dieser Umwandlung die Allgemeingültigkeit, die Gleichung (101) zukam: er bleibt nämlich dann nur noch auf solche Vectoren $\mathfrak{A}$ anwendbar, die überhaupt von einem Potentiale abgeleitet werden können, d. h. deren curl $= 0$ ist (§ 30).

$\mathfrak{A}$ sei jetzt ein solcher Vector und das ihm zugehörige Potential sei V. Dabei wollen wir wegen der Anwendungen, die wir hier davon zu machen beabsichtigen, das Vorzeichen von V so wählen, wie es durch die Definitionsgleichung (88[a]) S. 66 festgestellt ist. Dann ist nach § 29

$$\int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} = -(V - V_0),$$

also auch, wenn wir unter $d\mathfrak{s}$ eine beliebige unendlich kleine Strecke und unter dV die zugehörige Potentialänderung verstehen,

$$dV = -\mathfrak{A}\, d\mathfrak{s}.$$

Mit Rücksicht auf die in § 18 erörterten Eigenschaften der Operation ∇ lässt sich dies dadurch ausdrücken, dass man setzt (Gleichung (36), S. 38)

$$\mathfrak{A} = -\nabla V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (104)$$

Setzt man dies in Gleichung (101) ein und beachtet, dass nach Gleichung (68) S. 57 div ∇ zur Operation ∇^2 führt, so erhält man

$$\int \nabla V \mathfrak{N}_1 df = -\int \nabla^2 V dv \quad . \; . \; . \; . \quad (105)$$

Auch hier sind die Integrationen auf die Oberfläche und das Volumen eines beliebig abgegrenzten Raumes zu erstrecken, in dem keine Stetigkeitsunterbrechungen vorkommen.

Gleichung (105) weist darauf hin, dass bei der vorausgesetzten Vertheilung des Vectors $\mathfrak{A}$ ausser der Hülfsgrösse V noch eine dritte Grösse eine wichtige Rolle zu spielen vermag, nämlich $\nabla^2 V$. Wir werden in der That sehen, dass diese Grösse für die Potentialtheorie von geradezu fundamentaler Bedeutung ist und führen daher eine besondere Bezeichnung für sie ein. Durch Definition setzen wir fest, dass

$$\varrho = -\nabla^2 V = -\operatorname{div} \nabla V = \operatorname{div} \mathfrak{A} \quad . \; . \; . \quad (106)$$

ist. Gleichung (105) nimmt dann die Form an

$$\int \nabla V \mathfrak{N}_1 df = -\int \mathfrak{A} \mathfrak{N}_1 df = \int \varrho dv \quad . \; . \; . \quad (107)$$

Wenn $\mathfrak{A}$ ursprünglich beliebig gegeben war, mit der Einschränkung, dass die Vertheilung eine wirbellose und stetige sein soll, ist zunächst das Potential V für jeden Punkt des betrachteten Raumes bis auf eine Constante durch die Untersuchung in § 29 und ferner ϱ durch die Definitionsgleichung (106) eindeutig bestimmt. Ist andererseits V für jeden Punkt des betrachteten Raumes gegeben, so folgen daraus nach den Gleichungen (104) und (106) ebenfalls die beiden anderen Werthe. — Die Grösse ϱ ist wie V eine scalare Hülfsgrösse, deren man sich zur Untersuchung der Eigenschaften der Vectorvertheilung $\mathfrak{A}$ bedienen kann.

Man kann nun aber auch die Aufgabe umkehren und verlangen, dass $\mathfrak{A}$ und V berechnet werden, wenn für jeden

Punkt des Raumes ϱ gegeben ist. Dies kommt auf die Auflösung einer der Differentialgleichungen $\nabla^2 V = -\varrho$ oder $\operatorname{div} \mathfrak{A} = \varrho$ hinaus. — Dazu soll uns Gleichung (107) verhelfen.

Der Umstand, dass die zu integrirenden Differentialgleichungen linear sind, hat zur Folge, dass, wenn $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$ gesetzt wird, auch V und $\mathfrak{A}$ in je zwei Glieder $V_1 + V_2$ bezw. $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ zerfallen, so dass V_1 die Lösung der Differentialgleichung $\nabla^2 V_1 = -\varrho_1$ bildet u. s. w. Wir werden daher jede gegebene Raumvertheilung der Grösse ϱ in beliebiger Weise in mehrere Vertheilungen zerlegen und das zur gesammten Grösse ϱ gehörige Potential durch Summirung der Einzelpotentiale ableiten können.

Man grenze nun in dem Raume eine Kugel von dem unendlich kleinen Halbmesser r ab. Innerhalb der Kugel bezeichnen wir den Mittelwerth von ϱ mit ϱ_1; ausserhalb der Kugel sei ϱ_1 überall Null, d. h. ϱ_1 ist jener Theil von ϱ, der nur zu dem Innenraume der Kugel beisteuert. Mit den vorher angegebenen Bezeichnungen erhalten wir aus Gleichung (107), wenn wir sie auf die Fläche und den Innenraum der Kugel anwenden

$$\int \mathfrak{A}_1 \mathfrak{N}_i df = -\int \varrho_1 dv$$

Die Kugel war unendlich klein angenommen. Wir können daher, falls keine Stetigkeitsunterbrechungen in ihr vorkommen, die Werthe von ϱ für alle zum Kugelraum gehörigen Elemente gleich dem Mittelwerthe ϱ_1 setzen und aus Symmetriegründen folgt dann sofort, dass $\mathfrak{A}_1$ für alle Oberflächenelemente der Kugel gleich gross sein und in die Richtung des Radius fallen muss. Wenn wir das Raumintegral zur Abkürzung mit M bezeichnen, erhalten wir also

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{N}_i = -\frac{M}{4\pi r^2}.$$

$\mathfrak{A}_1$ ist also nach dem Aussenraume hin gerichtet und kann auch

$$\mathfrak{A}_1 = -\mathfrak{N}_i \frac{M}{4\pi r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

gesetzt werden, da $\mathfrak{N}_i$ in beiden Fällen den Tensor 1 hat und die Multiplication damit sich nur auf die Richtung bezieht.

Legen wir jetzt concentrisch zur ersten Kugel eine zweite, deren Halbmesser endlich ist und der immer noch mit r bezeichnet werden mag, so jedoch, dass auch jetzt M sich nur auf das frühere Kugelvolumen bezieht, so gelten für das Integral über die neue Kugelfläche die soeben durchgeführten Schlüsse ohne jede Aenderung und wir erkennen daraus, dass durch Gleichung (108) $\mathfrak{A}_1$ überall ausserhalb des von M eingenommenen Raumes richtig dargestellt wird.

Um uns von der Beziehung auf die Oberflächennormale $\mathfrak{N}_i$ frei zu machen, bezeichnen wir einen von dem Mittelpunkte der unendlich kleinen Kugel nach irgend einem Punkte des äusseren Raumes gezogenen Radiusvector mit $\mathfrak{r}$; dann ist

$$\mathfrak{r} = -\mathfrak{N}_i r$$

und Gleichung (108) geht über in

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{r}\frac{M}{4\pi r^3}. \quad \ldots \ldots \quad (109)$$

Um für irgend eine Stelle des Raumes den Werth von $\mathfrak{A}$ zu finden, der zu der ganzen Vertheilung von ϱ gehört, ist es nur nöthig, nach Gleichung (109) die Werthe von $\mathfrak{A}$ zu bilden, die sich auf alle fern gelegenen Raumtheile und die zu ihnen gehörigen Werthe M beziehen und sie sämmtlich zu summiren. Dazu kommt dann noch der Beitrag des unmittelbar benachbarten Raumes, also etwa einer unendlich kleinen Kugel, die um den ins Auge gefassten Punkt als Mittelpunkt beschrieben ist. Dieser verschwindet aber, wenn wir die Kugel bis zum Mittelpunkt zusammenschrumpfen lassen, da M mit der dritten Potenz des Radius abnimmt.

Als Lösung der Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{A} = \varrho$ finden wir daher

$$\mathfrak{A} = \int \mathfrak{r}\frac{\varrho\, dv}{4\pi r^3} \quad \ldots \ldots \quad (110)$$

Die Integration ist jetzt auf den ganzen Raum auszudehnen, über den sich die Vertheilung ϱ erstreckt. Es würde uns frei stehen, eine Integrationsconstante, sowie ferner noch einen sonst beliebig vertheilten Vector $\mathfrak{A}_0$ der Lösung hinzuzufügen, der den curl irgend eines anderen Vectors $\mathfrak{B}$ bildet, da nach Gleichung (71) dessen div Null ist, so dass die Gleichung div $\mathfrak{A} = \varrho$ auch nach der Beifügung eines solchen Gliedes zu $\mathfrak{A}$ immer noch erfüllt bleibt. Wir sehen aber davon ab, weil wir es uns von vornherein zur Aufgabe gestellt haben, die Untersuchung auf wirbellose Vertheilungen des Vectors $\mathfrak{A}$ zu beschränken. Dass der durch Gleichung (110) gegebene Ausdruck in der That eine wirbellose Vertheilung von $\mathfrak{A}$ darstellt, ergibt sich sofort aus der Umformung, der wir ihn jetzt unterwerfen wollen, in Verbindung mit Gleichung (69).

Um nämlich auch noch V zu ermitteln, haben wir das Integral der Gleichung

$$\nabla V = -\int \mathfrak{r} \frac{\varrho\, dv}{4\pi r^3}$$

aufzusuchen. Nun ist aber nach Gleichung (36) S. 38

$$dr = \nabla r \cdot d\mathfrak{r}.$$

Wenn $d\mathfrak{r}$ senkrecht zu $\mathfrak{r}$ gewählt wird, verschwindet dr und es wird positiv, wenn $d\mathfrak{r}$ in die Richtung von $\mathfrak{r}$ fällt, weil dann eine Vergrösserung des scalaren Abstandes eintritt. Daraus folgt, dass der Vector ∇r in die Richtung von $\mathfrak{r}$ fällt. Da aber in dem zuletzt erwähnten Falle $dr = \mathfrak{r} d\mathfrak{r}/r$ ist, ergibt sich

$$\nabla r = \frac{\mathfrak{r}}{r},$$

was sich übrigens auch unabhängig von dieser Betrachtung leicht durch Zerlegung von $\mathfrak{r}$ in seine 3 Componenten u. s. f. ableiten lässt.

Hieraus folgt weiter

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \nabla r = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3}.$$

Die Differentialgleichung für V geht damit über in

$$\nabla V = \int \frac{\varrho\, dv}{4\pi} \cdot \nabla \frac{1}{r} = \nabla \int \frac{\varrho\, dv}{4\pi r}.$$

Sehen wir auch hier von der Beifügung einer Integrationsconstanten ab, so haben wir als Lösung der Gleichung $\nabla^2 V = -\varrho$ schliesslich

$$V = \int \frac{\varrho\, dv}{4\pi r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (111)$$

§ 37.

Die Entwickelungen des vorigen § haben uns in den Stand gesetzt, wenn irgend eine der drei Grössen, $\mathfrak{A}$, V, ϱ für jeden Punkt des Raumes gegeben ist, daraus die beiden anderen zu berechnen. Dabei waren V und ϱ blosse Hülfsgrössen, die mit der uns in erster Linie interessirenden Grösse $\mathfrak{A}$ zunächst nur durch die bei dieser Betrachtung gefundenen analytischen Beziehungen zusammenhängen. Der Grösse V haben wir zwar die Bezeichnung Potential gegeben, ohne jedoch dadurch irgend etwas über die Bedeutung dieser Grösse auszusagen. Für ϱ haben wir bisher überhaupt keinen Namen eingeführt.

Es ist durchaus nöthig, dass man dieses rein geometrischen Zusammenhangs der drei Grössen eingedenk bleibt, wenn man zu den Anwendungen übergeht, da man sonst nur zu leicht zu falschen Vorstellungen über die Bedeutung des Begriffes der Masse (sei es der ponderabeln Masse oder der Elektricitäts- oder Magnetismusmenge) geführt wird.

In der Nähe elektrisirter Körper z. B. treten an einem elektrisch geladenen materiellen Punkte Kräfte auf. Bringen wir den Punkt an verschiedene Stellen des Raumes, so wechselt die an ihm wirkende Kraft nach Grösse und Richtung. Jedem Punkte des Raumes oder des „elektrostatischen Feldes" entspricht eine bestimmte Kraft und wir werden den Zustand des Feldes dann genau kennen, wenn die Vertheilung dieser Vectorgrösse im ganzen Raume bekannt ist. Durch die rein analytischen Entwicklungen des vorigen § sind wir dann auch in den Stand gesetzt, die dort mit V und ϱ bezeichneten Grössen zu berechnen. Es steht uns ferner frei, die Grössen ϱ als die primär gegebenen anzusehen und sie als die U r s a c h e n der Grössen $\mathfrak{A}$ und V zu betrachten. Thun wir dies, so sehen wir die Kräfte $\mathfrak{A}$ als Fernkräfte an, die von den „Massen" ϱdv oder $\varrho dv/4\pi$ ausgehen. Wir sind zu dieser Auffassung berechtigt, da sie der anderen, die von der Betrachtung der Vectoren $\mathfrak{A}$ als der bedeutsameren ausgeht mathematisch gleichwerthig ist und zu denselben Ergebnissen zu führen vermag.

Anders ist es aber, wenn man die physikalische Bedeutung dieser Grössen ins Auge fasst. Es wäre ungerechtfertigt, aus dem Bestehen jener Identitäten den Schluss zu ziehen, dass sich die Grössen ϱ und $\mathfrak{A}$ in der That so gegenüberstehen, dass ϱ physikalisch als die Ursache der $\mathfrak{A}$ anzusehen ist; ebensogut kann auch das Umgekehrte zutreffen.

Wenn in der Maxwell'schen Elektricitätslehre von elektrischen oder magnetischen Massen die Rede ist, geschieht es nicht wie in der Fernwirkungslehre in der Absicht, sie als die Ursachen der Erscheinungen hinzustellen oder überhaupt dadurch eine Vorstellung zu erwecken, die sich an den Begriff der ponderablen Massen anzulehnen hätte. Vielmehr sind darunter nur jene mathematischen Hülfsgrössen zu verstehen, die aus den rein geometrischen Betrachtungen der vorigen §§ hervorgingen. Die Frage, welche physikalische Bedeutung ihnen beizulegen sei, bleibt dabei zunächst vollständig offen. Jedenfalls ist es aber die ausgesprochene Tendenz der Maxwell'schen Theorie zur Darstellung der Erscheinungen in erster Linie die Vectoren $\mathfrak{A}$ selbst zu benutzen.

Nach diesen Vorbemerkungen setze ich durch Definition fest, dass (zunächst vom Vorzeichen abgesehen) $\varrho dv/4\pi$ die im Raumelemente dv enthaltene elektrische, magnetische oder ponderable Masse genannt wird, wenn die Vectoren $\mathfrak{A}$ elektrische, magnetische oder Gravitations-Kräfte sind, von denen wir annehmen, dass sie von diesen Massen ausgehen. Gleichung (108) spricht dann das Coulomb'sche (bezw. Newton'sche) Fernwirkungsgesetz aus. Schreibt man für $\varrho/4\pi$ kürzer ϱ', so ist demnach ϱ' die Dichte einer räumlichen Massenvertheilung und wir haben, wenn ebenso auch M' für die in einem Raumelemente enthaltene Masse $M/4\pi$ geschrieben wird, für die von ihr ausgehende Kraft $\mathfrak{A}$ nach (108) bezw. (109)

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{R}_1 \frac{M'}{r^2} = \mathfrak{r} \frac{M'}{r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Diese Kraft ist, da $\mathfrak{r}$ von der Masse M' nach dem Punkte hingeht, auf den sich $\mathfrak{A}$ bezieht, eine abstossende; handelt es sich um die Darstellung anziehender Kräfte, so ist das Vorzeichen von M' umzukehren. Dasselbe gilt auch von dem Vorzeichen von ϱ' in der Formel

$$V = \int \frac{\varrho' dv}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

Für viele Untersuchungen würde es sich mehr empfehlen, an Stelle von ϱ' die ursprüngliche Grösse ϱ selbst als Dichte der Masse zu bezeichnen. Es würde dies auf eine abgeänderte Festsetzung der Maasseinheiten hinauslaufen, in Folge derer sich die wichtigsten Gleichungen der Elektricitätslehre durch Unterdrückung der Grösse 4π vereinfachten. O. Heaviside hat dies in seinen neueren Arbeiten überall consequent durchgeführt. So gerne ich ihm auch in diesem Punkte folgen möchte, glaube ich doch hier davon absehen zu sollen, um nicht durch den Gebrauch eines Maasssystems, das von dem einmal eingeführten abweicht, den Leser zu verwirren.

Die physikalische Bedeutung der Grösse V ergibt sich, für den Fall, dass $\mathfrak{A}$ eine Kraft bedeutet, leicht aus den Gleichungen (87) und (88), bezw. (88[a]). Das Linienintegral $J_{0,1}$ oder der Potentialunterschied $-(V - V_0)$ im Falle abstossender Kräfte gibt die Arbeit an, die von der Kraft $\mathfrak{A}$ beim Durchlaufen des Weges $P_0 P_1$ geleistet wird. Das Potential V kann also auch als die Arbeit definirt werden, die vermittelst einer Kraft fremden Ursprungs oder einer „eingeprägten" Kraft geleistet werden muss, um etwa einen elektrisch geladenen Punkt von ausserhalb her, wo das Potential Null war, nach der Stelle des Feldes zu bringen, wo es gleich V ist und um hierbei die sich dieser Bewegung widersetzende Kraft $\mathfrak{A}$ zu überwinden.

Zweiter Abschnitt.

Die Grundlinien der Maxwell'schen Elektricitätstheorie.

Erstes Capitel.

Die in der Elektricitätslehre vorkommenden Vectoren.

§ 38. Kraft und Verschiebung im elektrischen Felde.

Eine Metallkugel sei mit einer Elektricitätsmenge geladen und rings entweder von Luft oder von einem andern Dielektricum umgeben oder auch in einem Vacuum aufgestellt. Das Dielektricum (oder der Aether im sogenannten Vacuum) wird dann in einem Zwangszustand versetzt, wodurch in jedem Volumenelemente eine Aufspeicherung von Energie eintritt, die bei der Entladung der Metallkugel wieder freigegeben wird. Zugleich hat der Zwangszustand zur Folge, dass an einem kleinen geladenen Körperchen, das in das Feld gebracht wird, ponderomotorische Kräfte auftreten.

Das Wort Zwangszustand ist zunächst nur bestimmt, den Zustand kurz zu bezeichnen, der durch die Ladung der Metallkugel im Dielektricum hervorgerufen wird. Faraday und Maxwell haben die specielle Art des von ihnen angenommenen Zwanges zwar von vornherein angegeben. Es ist aber sehr zweifelhaft, ob diese Annahmen der Wirklichkeit entsprechen und man thut daher besser, die Frage offen zu lassen, worin der Zwang in dem bezeichneten Falle besteht. Nur darauf ist Gewicht zu legen, dass er mit der Energieaufspeicherung im Dielektricum zusammenhängt. Freilich scheidet sich schon durch diese Festsetzung die Maxwell'sche Theorie vollständig von der

Fernwirkungstheorie, die eine Anhäufung von Energie im Aether überhaupt nicht kennt.

Ueberall, wo in der Natur eine Aufspeicherung von Energie eintritt, wird sie durch zwei Factoren bestimmt, einen Quantitäts- und einen Intensitätsfactor. So ist die lebendige Kraft das Product aus der Masse und dem halben Quadrate der Geschwindigkeit, die Wärme gleich dem Producte aus Wärmecapacität und Differenz der Temperaturen, die in einer gespannten Feder aufgespeicherte Energie für jede weitere Anspannung gleich dem Producte aus dem Wege und der Kraft (für die ganze Energie ist, wenn man unter Kraft die zuletzt erreichte Anspannung versteht, noch der Factor $\frac{1}{2}$ beizufügen) u. s. f. Wir werden daher auch für eine hinreichende Characterisirung des Zwangszustandes im elektrostatischen Felde, wenn wir auch ganz darauf verzichten, sein eigentliches Wesen zu ergründen, doch mindestens zwei Grössen angeben müssen, aus denen der Energievorrath abgeleitet werden kann.

Eine dieser Grössen ist die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}$, die sich unmittelbar durch die Erfahrung darbietet und auf deren Beobachtung sich der ganze Inhalt der Elektricitätslehre in der ersten Zeit ihrer Begründung ausschliesslich stützte, bis sich daraus durch Abstraction der Begriff der elektrischen Masse entwickelt hatte. Die zweite Grösse ist die dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$. Sie hängt von dem Werthe, den $\mathfrak{E}$ an der betreffenden Stelle des Feldes erlangt hat, in derselben Weise ab, wie die Zusammendrückung einer Feder von der Grösse der sie treibenden Kraft.

Die Einführung des Begriffes der dielektrischen Verschiebung erfolgte rein hypothetisch und in engster Anlehnung an das durch den Vergleich mit einer in Spannung versetzten Feder gegebene Vorbild. Sie bildet eine der Hauptgrundlagen der Maxwell'schen Theorie. Bis zu einem gewissen Grade kann nachträglich die Nothwendigkeit der Einführung einer solchen Grösse durch die soeben durchgeführte Betrachtung über die Abhängigkeit der Energieansammlung von zwei Factoren begründet werden. Eine wirkliche Rechtfertigung dafür bildet aber nur der Umstand, dass sich mit ihrer Hülfe die beobachteten Erscheinungen am besten wiedergeben lassen.

Auch die dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ muss eine Vectorgrösse sein, wenn sie durch Hinzutreten zu $\mathfrak{E}$ zu einer Energie, also zu einer scalaren Grösse führen soll. — Wenn $\mathfrak{E}$ gegeben ist, ist damit auch $\mathfrak{D}$ für dieselbe Stelle des Feldes bestimmt oder es hängt wenigstens dann nur noch von den Eigenschaften des Stoffes ab, in dem der Zwangszustand auftritt. Bei isotropen dielectrischen Körpern ist, wie schon aus Symmetriegründen hervorgeht, $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{E}$ gleich gerichtet. Bei äolotropen Körpern bildet $\mathfrak{D}$ eine lineare Vectorfunction von $\mathfrak{E}$; dieser Fall ist von Wichtigkeit für die elektromagnetische Lichttheorie, speciell für die Behandlung der Krystalloptik. Auf diese werde ich mich aber in diesem Werke nicht einlassen und ich will mich daher von vornherein darauf beschränken, isotrope Körper ins Auge zu fassen.

Die Abhängigkeit der Verschiebung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{E}$ lässt sich in isotropen Körpern durch die Gleichung ausdrücken

$$\mathfrak{D} = c \cdot \mathfrak{E} \quad \text{. . . . .} \quad (114)$$

wo c eine vom Material abhängige und, wie die Erfahrung lehrt, für dasselbe Material constante (d. h. von der absoluten Grösse von $\mathfrak{E}$ unabhängige) Grösse bedeutet

An Stelle von Gleichung (114) kann man auch schreiben

$$\mathfrak{D} = \frac{K}{4\pi} \cdot \mathfrak{E} \quad \text{. . . . . . .} \quad (115)$$

wobei der Coefficient c durch $K/4\pi$ ersetzt ist. An und für sich ist es ganz gleichgültig, welchen der beiden Coefficienten und damit welche der beiden Gleichungen man zur Darstellung der Erscheinungen benutzen will. Man kann darüber nach Gutdünken verfügen, da c und K Grössen sind, die erst durch die Gleichungen (114) und (115) selbst ihre Definition erhalten. Wir werden uns hier der Gleichung (115) bedienen. Der in ihr vorkommende Coefficient hat den Namen Dielektricitätsconstante (oder auch specifische inductive Capacität) erhalten und wird häufiger gebraucht als c. Diese Wahl hängt übrigens mit der zusammen, die wir in § 37 bezüglich der Massen- und Potentialeinheit getroffen haben. Sie trägt zwar dazu bei, die Formeln durch Mitschleppen des Factors 4π zu belasten, hat aber andererseits den Vorzug, in Uebereinstimmung mit dem aus der Fernwirkungstheorie übernommenen Systeme elektrischer Einheiten zu stehen.

Die in einem Raumelemente aufgespeicherte Energie erfährt eine Vermehrung, wenn $\mathfrak{E}$ anwächst, die nach den vorhergehenden Festsetzungen gleich dem scalaren Producte $d\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} dv$ ist. Daraus folgt, wenn man den linearen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ (Gleichung 115) beachtet, durch Integration sofort, dass die ganze Energie dT im Volumenelemente dv durch jeden der folgenden Ausdrücke wiedergegeben wird

$$dT = \frac{1}{2}\,\mathfrak{E}\mathfrak{D} dv = \frac{K}{8\pi}\,\mathfrak{E}^2 dv = \frac{2\pi}{K}\,\mathfrak{D}^2 dv \quad . \quad . \quad (116)$$

§ 39. Der Kraftfluss. Satz von Gauss.

Man denke sich irgendwo im elektrischen Felde ein Flächenstück df abgegrenzt, dessen Normale $\mathfrak{N}$ eine beliebige Richtung haben mag. Unter dem Kraftfluss durch die Fläche df versteht man den Werth des Ausdruckes $\mathfrak{E}\mathfrak{N} df$. Dieser ist positiv oder negativ, je nachdem die Normale $\mathfrak{N}$ (deren Tensor $= 1$ ist) die Fläche im gleichen oder entgegengesetzten Sinne wie $\mathfrak{E}$ durchsetzt. Der Kraftfluss durch eine endliche Fläche von beliebiger Gestalt wird daher durch den Werth des Oberflächenintegrals von $\mathfrak{E}$ über diese Fläche angegeben.

Man gewinnt eine geometrische Darstellung von der Vertheilung des Kraftflusses, wenn man Linien zieht, die in ihrem ganzen Verlaufe mit der Richtung von $\mathfrak{E}$ zusammenfallen. Die Zahl der Linien, die ein zu $\mathfrak{E}$ normales Flächenstück df durchkreuzen, wählt man überall proportional zu dem Tensor von $\mathfrak{E}$. Die Kraftliniendichte, d. h. die Zahl der Kraftlinien die auf die Flächeneinheit kommt, wenn diese senkrecht zu $\mathfrak{E}$ gelegt wird, ist daher $= mE$ zu setzen, wo m den Maassstab dieser Dichte und E den Tensor von $\mathfrak{E}$ bedeutet. Steht die Fläche nicht normal zu $\mathfrak{E}$, so ist die Zahl der sie durchschneidenden Kraftlinien entsprechend geringer und zwar gleich dem Producte aus der Kraftliniendichte, der Grösse der Fläche und dem Cosinus des Winkels zwischen der Normalen $\mathfrak{N}$ und einem in der Richtung von $\mathfrak{E}$ gezogenen Einheitsvector $\mathfrak{E}_1$. Dies gibt $mE \cdot df \cdot \mathfrak{N}\mathfrak{E}_1$ oder $mdf\mathfrak{N}\mathfrak{E}$, d. h. die Zahl der Kraftlinien ist bei beliebiger Richtung der Fläche df gleich dem Kraftflusse multiplicirt mit dem der Darstellung zu Grunde gelegten Maassstabfactor m. Wir können daher den Kraftfluss überall im Felde durch die Zahl der Kraftlinien messen.

Aus dem in § 33 bewiesenen Satze folgt, dass die Zahl der Kraftlinien für eine geschlossene Fläche gleich Null ist, wenn im umschlossenen Raume überall div $\mathfrak{E}$ Null ist, oder mit anderen Worten die Zahl der austretenden Kraftlinien ist in diesem Falle gerade gleich der Zahl der eintretenden. Solche Stellen des Raumes, in denen div $\mathfrak{E}$ positiv ist, bezeichnen wir als Quellen des Kraftflusses, denn aus Gleichung (101) S. 77 folgt, dass durch eine Fläche, die eine solche Stelle umschliesst, mehr Kraftlinien aus- als eintreten.

Nach der in § 37 eingeführten Bezeichnung ϱ' für den Werth $^1/_{4\pi}$ div $\mathfrak{A}$, oder wie wir hier setzen wollen, um für die Folge den Index zu vermeiden,

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E}$$

erhalten wir aus Gleichung (101)

$$\int \mathfrak{E}\mathfrak{N}_i df = -4\pi \int \varrho dv.$$

Ersetzen wir hierin ferner noch die nach innen gezogene Normale $\mathfrak{N}_i$ durch die nach aussen gezogene $\mathfrak{N}_a$, so wird dies

$$\int \mathfrak{E}\mathfrak{N}_a df = 4\pi \int \varrho dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

und diese Gleichung sagt aus, dass der aus der Fläche austretende Kraftfluss oder der Ueberschuss der Zahl der austretenden über die der eintretenden Kraftlinien gleich dem 4π-fachen der von der Fläche umschlossenen Elektricitätsmenge ist.

Falls ϱ im Innern nirgends negativ ist, müssen die aus dem umschlossenen Raume stammenden Kraftlinien von den Ladungen ϱdv ausgehen, während die von ausserhalb kommenden den Raum in stetigem Laufe durchsetzen. Umschliesst die Fläche dagegen negative Ladungen, so bilden diese die Endpunkte elektrostatischer Kraftlinien. Die Zahl der eintretenden Kraftlinien überwiegt hier die der austretenden, weil einige von ihnen an den negativen Ladungen endigen.

Die elektrischen Kraftlinien verbinden demnach Elektricitätsmengen von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen mit einander, so dass sie von positiven Mengen ausgehen und in negativen Ladungen endigen, oder sie sind in sich geschlossene Linien. Wo geschlossene Kraftlinien auftreten, lassen sich die Kräfte nicht mehr von einem Potentiale ableiten, da das Linienintegral über eine geschlossene Kraftlinie von Null verschieden ist (§ 29 u. 30). Man kann daher auch ein solches Feld nicht mehr auf das Auftreten elektrischer Massen zurückführen.

Wir werden später sehen, dass geschlossene elektrische Kraftlinien durch magnetische Ströme hervorgebracht werden. In den älteren Theorien hat man zwischen den beiden Arten elektrischer Kräfte streng geschieden und jene Kräfte $\mathfrak{E}$, deren Kraftlinien elektrische Massen entgegengesetzten Vorzeichens mit einander verbinden als elektrostatische Kräfte, die durch magnetische Ströme hervorgebrachten, zu geschlossenen Kraftlinien gehörigen Kräfte $\mathfrak{E}$ dagegen als inducirte Kräfte bezeichnet. In der Maxwell'schen Theorie liegt aber gar kein Grund zu einer solchen principiellen Scheidung vor: welches auch der Ursprung der Kraft $\mathfrak{E}$ sei, ob sie zu geschlossenen oder offenen Kraftlinien gehören mag, die Wirkung, die sie im gegebenen Augenblicke und an der betreffenden Stelle des Feldes hervorbringt, ist davon ganz unabhängig und nur durch den Werth von $\mathfrak{E}$ selbst bedingt.

Wenn aber auch dieser Scheidung aus principiellen Gründen zu widersprechen ist, so empfiehlt es sich doch aus didaktischen Gründen jene Fälle zuerst zu behandeln, bei denen man es nicht mit in sich geschlossenen Kraftlinien zu thun hat, d. h. wie es von jeher in der Elektricitätslehre üblich war, mit der Behandlung der Elektrostatik zu beginnen.

Der durch Gl. 117 ausgesprochene Satz wurde zuerst von Gauss aufgestellt und wird daher als der Gauss'sche Satz vom Oberflächenintegral bezeichnet.

§ 40. Der Verschiebungsfluss.

Dieselbe geometrische Darstellungsmethode, die wir soeben auf den Vector $\mathfrak{E}$ angewendet haben, lässt sich auf jeden anderen continuirlich im Raume vertheilten Vector, also auch auf die dielectrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ anwenden.

Bei isotropen Körpern, auf deren Betrachtung wir uns hier beschränken, gleicht der Verschiebungsfluss dem Kraftflusse in hohem Grade. Wie aus Gleichung (115) hervorgeht, sind in diesem Falle die Verschiebungslinien überall gleichgerichtet mit den Kraftlinien und wenn das Medium ausserdem auch homogen, d. h. K constant ist, wird der Verschiebungsfluss durch genau dasselbe Liniensystem dargestellt wie der Kraftfluss, so dass nur der Maassstabsfactor m (§ 39) für beide von verschiedenem Werthe ist.

Wir wollen indessen auch den Fall ins Auge fassen, dass K mit dem Orte veränderlich ist. Körper, innerhalb deren K verschieden ist, brauchen zwar kaum erörtert zu werden; wenn man anisotrope Körper nicht behandelt, könnte man erst recht auf die Besprechung der heterogenen Körper verzichten. Dagegen kommt es oft genug vor und zwar so oft, dass man auch bei einer summarischen Darstellung nicht davon absehen kann, dass zwei Körper an einander grenzen, für die K verschieden ist. Anstatt nun aber eine Stetigkeitsunterbrechung an der Grenzfläche anzunehmen, wollen wir in solchen Fällen voraussetzen, dass sich K an den Berührungsstellen stetig, wenn auch sehr schnell von dem einen Werthe zum andern ändert. Zunächst ist diese Annahme an sich wahrscheinlicher als die vorige; scheinbar schroffe Uebergänge werden in der Natur meist (wenn nicht stets) in

Wirklichkeit durch Uebergangsschichten vermittelt. Dann aber vermeiden wir damit die Weitläufigkeiten, die damit verbunden sind, den Discontinuitäten Rechnung zu tragen. Das schliessliche Resultat ist zudem unabhängig davon, welchen Modus des Uebergangs wir wählen.

Sobald K als veränderlich angenommen wird, zeigen sich zwischen dem Kraftflusse und dem Verschiebungsflusse erhebliche Unterschiede. Die Linien von beiden sind zwar immer noch überall gleich gerichtet, aber das Verhältniss ihrer Dichten ändert sich von Ort zu Ort. Das wird durch zwei Gründe bedingt. Zunächst nämlich haben die Verschiebungslinien andere Anfangs- und Endpunkte als die Kraftlinien. Ist z. B. div $\mathfrak{E}$ innerhalb eines gegebenen Bezirkes überall Null, so gehen die Kraftlinien ununterbrochen durch den Bezirk hindurch; von den Verschiebungslinien gilt dies aber keineswegs, da div $\mathfrak{D}$ nicht mit div $\mathfrak{E}$ zugleich verschwindet. Aus Gleichung (115) erhalten wir vielmehr bei Anwendung des in Gleichung (78) S. 61 ausgesprochenen Rechengesetzes

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{D} &= \frac{1}{4\pi}(K \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \cdot \nabla K) \\ &= K\varrho + \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E} \cdot \nabla K \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

Dazu kommt aber noch ein anderer Umstand. Behandeln wir z. B. eine rein elektrostatische Aufgabe, also eine solche, bei der nach § 39 keine in sich geschlossenen Kraftlinien vorkommen, oder bei der curl $\mathfrak{E}$ überall Null ist, oder, was auch auf dasselbe hinauskommt, bei der sich $\mathfrak{E}$ von einem Potentiale ableiten lässt, so gilt dies Alles auch von der Verschiebung $\mathfrak{D}$ an solchen Stellen des Raumes, in denen K constant ist. Es gilt aber nicht mehr dort, wo K veränderlich ist. Unter der Voraussetzung curl $\mathfrak{E} = 0$ erhalten wir nämlich aus Gleichung (115) bei Anwendung des Rechengesetzes Gleichung (80) S. 61

$$\operatorname{curl} \mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} \mathrm{V}(\nabla K) \cdot \mathfrak{E}.$$

Dies zeigt uns, dass auch bei elektrostatischen Problemen in den Uebergangsschichten von einem Medium ins andere und überhaupt überall, wo K veränderlich ist, geschlossene Verschiebungslinien auftreten müssen.

§ 41. Freie und wahre Elektricität.

Die Maxwell'sche Theorie (in ihrer heutigen Gestalt) kennt zwei völlig von einander verschiedene Arten von Grössen, die beide als Elektricitätsmengen bezeichnet werden. Wenn auch Maxwell selbst schon gelegentlich auf den Unterschied zwischen beiden hinwies, hat doch erst Hertz consequent zwischen ihnen unterschieden und für die in § 39 vorkommende Grösse ϱ die Bezeichnung räumliche Dichte der freien Elektricität eingeführt. Diese freie Elektricität ist es, die mit dem Kraftflusse $\mathfrak{E}$ in dem früher erörterten Zusammenhange steht.

Nun haben wir aber neben dem Kraftflusse noch den Verschiebungsfluss $\mathfrak{D}$ und wir können nach den im vorigen Abschnitte entwickelten Sätzen der Potentialtheorie ebensogut wie zu $\mathfrak{E}$ auch zum Verschiebungsflusse $\mathfrak{D}$ fingirte Massen angeben, die als Ausgangs- und Endpunkte der Verschiebungslinien dienen. Voraussetzung ist dabei zwar, dass keine geschlossenen Verschiebungslinien vorkommen. Solche müssen wir nun nach dem vorigen § wenigstens in den Uebergangsschichten zwischen verschiedenen Medien erwarten. Wir wollen uns aber überall, wo dies zutrifft, die geschlossenen Verschiebungslinien von den übrigen ausgesondert denken, so dass $\mathfrak{D}$ in die Vectorsumme $\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}''$ zerlegt wird*), wobei $\mathfrak{D}'$ bei constantem K allein übrig bleibt und den Theil des Verschiebungsflusses angibt, dessen curl Null ist. Der andere Theil $\mathfrak{D}''$ bezieht sich dann ausschliesslich auf die geschlossenen Verschiebungslinien; er ist $^1/_{4\pi} \cdot \mathrm{curl}^{-1} V(\nabla K) \cdot \mathfrak{E}$, wenn mit curl^{-1} die Operation bezeichnet wird, durch die man vom

*) Vgl. den Anhang.

curl zur Stammgrösse zurückgelangt. Bei der Ausführung dieser Operation wäre, wenn man sie in einem bestimmten Falle wirklich durchführen wollte, bei der Wahl der Integrationsconstanten zu beachten, dass div $\mathfrak{D}''$ überall Null sein muss.

Der erste und Haupttheil $\mathfrak{D}'$ des Verschiebungsflusses kann nun ebenso wie der Kraftfluss mit einer Massen- und einer aus ihr hervorgehenden Potentialvertheilung in Verbindung gebracht werden. Für diese Massen hat Hertz die Bezeichnung der wahren Elektricitätsmengen eingeführt. — Durch Definition setzen wir fest (vgl. Gleichung 118)

$$\varrho_w = \operatorname{div} \mathfrak{D} = K\varrho_f + \frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{E} \cdot \nabla K = \frac{K^2\varrho_f + \mathfrak{D} \cdot \nabla K}{K} \tag{119}$$

und nennen ϱ_w die räumliche Dichte der wahren Elektricität. Dabei ist an Stelle der früher mit einfachem ϱ bezeichneten Dichte der freien Elektricität zur besseren Unterscheidung hier ϱ_f geschrieben.

Zu beachten ist, dass ϱ_w und ϱ_f sich nicht nur der Grösse und der räumlichen Vertheilung nach unterscheiden, sondern dass sie auch eine ganz verschiedene physikalische Bedeutung besitzen. Wir sind nämlich keineswegs berechtigt, die Dielektricitätsconstante K, die wir durch die sie definirende Gleichung (115) einführten, als eine absolute Zahl anzusehen. Vielmehr spricht alle Wahrscheinlichkeit gegen diese allerdings oft gemachte Annahme. Wenn aber die beiden Factoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, aus denen sich die Energie zusammensetzt, von verschiedener Art sind, trifft dies ebenso auch für die aus ihnen abgeleiteten Massen ϱ_w und ϱ_f zu.

Dass überhaupt zwei ganz von einander verschiedene Werthe vorkommen, die nach dem herkömmlichen Gebrauche des Wortes beide mit demselben Rechte auf die Bezeichnung als Elektricitätsmengen Anspruch erheben können, weist schon darauf hin, mit welcher Vorsicht von diesem Begriffe der elektrischen Massen Gebrauch zu machen ist. Für die Maxwell'sche Theorie sind die Elektricitätsmengen blosse Rechnungsgrössen, die zur Erleichterung der analytischen Behandlung in die Formeln eingeführt werden.

§ 42. Vergleich mit der Fernwirkungstheorie.

Die Fernwirkungstheorie gründet sich auf das Coulomb'sche Gesetz und baut die ganze Elektricitätslehre auf dem Fundamente der Elektrostatik auf. Im Gegensatze dazu hat man heute vielfach die Maxwell'sche Theorie so dargestellt, dass die Elektrodynamik vorausgeht und das Coulomb'sche Gesetz als letzte Consequenz der ganzen Theorie abgeleitet wird. Der Nachweis, dass dies möglich ist, ist gewiss von Werth. Wenn man darin aber den natürlichen Entwickelungsgang der Theorie erblickt, vermag ich dem durchaus nicht zuzustimmen.

Man sagt wohl, dass ein höherer Grad der Gewissheit erreicht würde, wenn die ganze Theorie ausschliesslich auf die Lagrange'schen Gleichungen begründet wird. Aber auch hier laufen Voraussetzungen mit unter, vor allem schon die, dass überhaupt ein Substrat vorhanden ist, für das die Lagrange'schen Gleichungen gelten, die ursprünglich doch nur für die ponderable Materie bewiesen sind. Ich glaube daher nicht, dass diese Methode der Darstellung einen solchen besonderen Vorzug für sich in Anspruch nehmen darf: auch sie vermag nicht a priori den zwingenden Nachweis für die Richtigkeit des ganzen Systems zu führen und ist wie jede andere auf die Bestätigung durch die Erfahrung angewiesen.

In der Vertheilung der Beweislast auf diese oder jene Gruppe von Behauptungen unter Einführung dieser oder jener Voraussetzungen, für deren Zulässigkeit in letzter Instanz doch immer nur die Erfahrung den Ausschlag geben muss, vermag ich überhaupt nur eine Aeusserlichkeit und nicht den Kern der Maxwell'schen Theorie zu erblicken. Ich halte es daher nicht nur für zulässig, sondern aus didaktischen Gründen auch für geboten, bei der Darstellung dieser Theorie von vornherein an elektrostatische Probleme und an die gewohntere Behandlung anzuknüpfen, die diesen von der Fernwirkungstheorie zu Theil wird. Der Vergleich der auf beiden Wegen erhaltenen Ergebnisse kann nur zu klareren Anschauungen verhelfen.

Zu diesem Zwecke leite ich zunächst den Green'schen Lehrsatz ab. Aus Gleichung (78) S 61 folgt, wenn man für $\mathfrak{A}$ hier U und für $\mathfrak{B}$ hier ∇V schreibt, wo U und V zwei beliebige scalare Veränderliche sind

$$\operatorname{div}(U \nabla V) = U \cdot \nabla^2 V + \nabla U \cdot \nabla V.$$

Dabei war noch Gleichung (68) zu beachten. — Ich multiplicire jetzt diese Gleichung mit dem Raumelemente dv und integrire sie über einen Theil des Raumes, der von einer bestimmten Fläche eingeschlossen wird. Bei der Ausführung dieser Integration erhält man auf der linken Seite einen Werth, für den man nach Gleichung (101) S. 77 setzen kann

$$\int \operatorname{div}(U \cdot \nabla V)\, dv = -\int (U \cdot \nabla V)\mathfrak{N}_i \cdot df$$

und daher schliesslich

$$\int \nabla U \cdot \nabla V \cdot dv + \int U \cdot \nabla^2 V dv + \int (U \nabla V)\mathfrak{N}_i df = 0 \qquad (120)$$

Diese Gleichung, in der die Integrale auf die Oberfläche und das Volumen des beliebig abgegrenzten Raumes auszudehnen sind, spricht den Green'schen Lehrsatz oder richtiger gesagt, einen der in enger Beziehung zu einander stehenden Green'schen Sätze aus. Voraussetzung für seine Anwendung ist die Stetigkeit in der Aenderung von U, V, ∇U, ∇V. Im andern Falle sind die Unstetigkeitsstellen auszuscheiden und das Oberflächenintegral ist auf die diese Ausscheidung bewirkenden Flächen mit zu erstrecken.

Ich wende diesen Satz jetzt auf ein elektrostatisches Feld an, das von einer Vertheilung positiver und negativer freier Ladungen herrührt, deren Summe gleich Null ist. Damit ist schon ausgesprochen, dass geschlossene Kraftlinien nicht vorkommen sollen und dass daher $\mathfrak{E}$ von einem Potentiale U abgeleitet werden kann. Wie wir früher sahen, können dagegen geschlossene Verschiebungslinien vorkommen. Wir zerlegen aber dann $\mathfrak{D}$, wie in § 41, in zwei Componenten $\mathfrak{D}'$

und $\mathfrak{D}''$, von denen $\mathfrak{D}''$ zu den geschlossenen Linien gehört. Zu $\mathfrak{D}'$ lässt sich dagegen ein Potential angeben, das wir mit V bezeichnen, so dass

$$\mathfrak{E} = -\nabla U, \quad \mathfrak{D}' = -\nabla V$$

ist. Wir wenden nun Gleichung (120) auf den ganzen unendlichen Raum an, indem wir uns Unstetigkeitsstellen im Innern des Raumes durch continuirliche Uebergänge, wie es in § 40 erläutert wurde, vermieden denken.

Da alle Kraftlinien und Verschiebungslinien im Innern des Raumes verlaufen (ausserdem auch U in unendlicher Entfernung zu Null wird), verschwindet in diesem Falle das Oberflächenintegral in Gleichung (120). Wenn wir noch $\nabla^2 V$ oder $-$ div $\mathfrak{D}$ durch $-\varrho_w$ (Gleichung 119) ersetzen, geht daher Gleichung (120) über in

$$\int \mathfrak{D}' \mathfrak{E} dv = \int U \varrho_w dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

Die Integrale beziehen sich auf den ganzen unendlichen Raum; dabei ist wohl zu beachten, dass zwar die ganzen Integrale, nicht aber ihre einzelnen, zu demselben dv gehörigen Elemente untereinander gleich sind.

Nach Gleichung (116) ist die im ganzen Raum aufgespeicherte elektrostatische Energie

$$T = \frac{1}{2} \int \mathfrak{D} \mathfrak{E} dv = \frac{1}{2} \int \mathfrak{D}' \mathfrak{E} dv + \frac{1}{2} \int \mathfrak{D}'' \mathfrak{E} dv.$$

Von diesen Ausdrücken unterscheidet sich die Hälfte der linken Seite von Gleichung (121) demnach durch das Fehlen des Gliedes $\frac{1}{2} \int \mathfrak{D}'' \mathfrak{E} dv$. Ich werde aber jetzt beweisen, dass dieses den Werth Null hat.

Zunächst erinnere man sich, dass der von $\mathfrak{D}$ abgetrennte Verschiebungsfluss $\mathfrak{D}''$ nur zu geschlossenen Kraftlinien gehört, dass also div $\mathfrak{D}''$ überall 0 ist. Um das Raumintegral von $\mathfrak{D}''\mathfrak{E}$ zu bilden, zerlege ich den ganzen Raum in geschlossene Röhren, deren Oberflächen aus Verschiebungslinien $\mathfrak{D}''$ zusammengesetzt sind. Der Querschnitt einer solchen Röhre sei df, ein Längenelement der Mittellinie sei als Vector betrachtet mit $d\mathfrak{s}$, dessen Tensor mit ds bezeichnet. Zunächst tritt nun an die Stelle des Raumelementes dv das Product $df ds$.

Für das Integral

$$\int \mathfrak{D}'' \mathfrak{E} \, df \, ds$$

kann ferner, da nach der erfolgten Raumzerlegung $d\mathfrak{s}$ überall in die Richtung von $\mathfrak{D}''$ fällt, auch

$$\int D'' \mathfrak{E} \, df \, d\mathfrak{s}$$

geschrieben werden, wobei nun D'' der Tensor von $\mathfrak{D}''$ ist. Für die ganze Röhre ist aber, nach ihrer Construction, der Verschiebungsfluss $D''df$ durch alle Querschnitte constant. Er kann daher, wenn wir zunächst die Integration auf den ringförmigen Innenraum der Röhre ausdehnen, als constanter Factor vor das Integralzeichen gesetzt werden, so dass wir als Beitrag der Röhre zum ganzen Raumintegral erhalten

$$D'' df \int \mathfrak{E} \, d\mathfrak{s}.$$

Nun sollte aber nach Voraussetzung $\mathfrak{E}$ zu einem rein elektrostatischen Felde gehören, also sein curl Null sein. Nach § 30 ist aber dann das über die geschlossene Ringmittellinie erstreckte Integral $\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s}$ gleich Null. Dies gilt für alle Röhren, in die sich der Raum zerlegen lässt und damit ist die vorhin aufgestellte Behauptung bewiesen.

In Gleichung (121) gibt also die linke Seite für sich den doppelten Betrag der im Raume aufgespeicherten elektrostatischen Energie (wenn auch nicht in der richtigen Vertheilung auf die einzelnen Volumenelemete) an. Dies gilt daher auch von dem Werthe auf der rechten Seite und wir erhalten

$$T = \frac{1}{2} \int U \varrho_w dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122)$$

Diese Gleichung zeigt uns, dass ausser der nach der Maxwell'schen Theorie vorausgesetzten Vertheilung der ganzen Energie auf die einzelnen Raumelemente noch eine zweite möglich ist, die im Einzelnen völlig von der vorigen abweicht, im Ganzen aber zu demselben Werthe führt. Es ist das die von der Fernwirkungstheorie angenommene Vertheilung. Um nämlich die elektrische Ladung herbeizuführen, kann man sich vorstellen, dass zuerst überall nur $1/n$ davon vorhanden ist, wo n eine sehr grosse Zahl bedeutet. Dann führen wir das zweite $n$tel an seinen Platz u. s. f. Wenn dieser Process so weit vorgeschritten ist, dass die Ladung überall das $x$fache der Endladung beträgt, ist auch das Potential gleich xU, und um die nun folgende Erhöhung von $x\varrho_w$ um $dx\varrho_w$ durchzuführen, muss für jedes Raumelement die Arbeit $xU \cdot dx\varrho_w dv$ aufgewendet werden. Integriren wir dies nach x von 0 bis 1, so werden wir unmittelbar zu dem oben stehenden Werthe von T geführt.

Diese Betrachtung lehrt uns aber noch mehr als die blosse Möglichkeit, auf Grund der Fernwirkungstheorie den gesammten Energieinhalt zu berechnen. Sie zeigt uns nämlich auch, dass für die Bildung des Potentials U die freie Elektricität zu Grunde zu legen ist, während als Massen, auf die die daraus hervorgehenden Kräfte $\mathfrak{E}$ einwirken, die wahren Elektricitätsmengen angesehen werden müssen.

Vertauscht man in der vorhergehenden Betrachtung die Bedeutungen von U und V miteinander, so erhält man

$$\int \mathfrak{D}'\mathfrak{E}dv = -\int U\nabla^2 V dv = \int U 4\pi\varrho_f dv$$

und nach Gleichung (119)

$$\varrho_w = \operatorname{div}\mathfrak{D}' = \operatorname{div}(-\nabla U) = -\nabla^2 U.$$

Die Lösung der Gleichung $\nabla^2 U = -\varrho_w$ gibt aber nach Gleichung (111) S. 86

$$U = \int \frac{\varrho_w dv}{4\pi r}$$

und daher schliesslich

$$T = \frac{1}{2}\int\int \frac{\varrho_w dv}{r} \cdot \varrho_f dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123)$$

was auf dasselbe hinaus kommt wie Gleichung (122).

Man hat also entweder wie vorher das Potential von den freien Elektricitätsmengen zu bilden und die wahren Ladungen als Substrate der daraus hervorgehenden Kräfte anzusehen oder umgekehrt, von den wahren Mengen das Potential zu nehmen und dieses auf die freien Ladungen anzuwenden.

In dem zuletzt erwähntem Falle erhalten wir zwar bei Ausdehnung der Integration über den ganzen Raum den richtigen Werth der ganzen Energie T; die Vertheilung auf die einzelnen Raumelemente weicht aber von der im anderen Falle ab, da die geschlossenen Verschiebungslinien $\mathfrak{D}''$ aus dem Potentiale der wahren Elektricitätsmengen nicht ableitbar sind. Dies zeigt uns, dass wir zur Ermittlung der Vorgänge an einzelnen Stellen des Raumes immer nur das Potential der freien Ladungen zu nehmen und die wahren Ladungen als die zugehörigen Substrate anzusehen haben.

Wenn K überall constant ist, wird nach Gleichung (119)

$$\varrho_w = K\varrho_f$$

und man kann dann für (123) schreiben

$$T = \frac{1}{2} K \int\int \frac{\varrho_f dv}{r} \varrho_f dv = \frac{1}{2K} \int\int \frac{\varrho_w dv}{r} \varrho_w dv \,. \quad (124)$$

Stehen sich also zwei elektrisch geladene Hollundermarkkügelchen z. B. in Petroleum gegenüber und man soll angeben, wie sich die zwischen ihnen auftretende Kraft zu der in der freien Luft verhält, so muss unterschieden werden, ob sich dies auf gleiche freie oder auf gleiche wahre Ladungen der Kügelchen bezieht.

§ 43. Leiter der Elektricität.

Elektrische Leiter sind solche Körper, die sich selbst überlassen einen elektrostatischen Zwangszustand nicht dauernd aufrecht zu halten vermögen. War dieser zuerst auf irgend eine Weise herbeigeführt, so geht er, wenn der Körper dann sich selbst überlassen wird, langsamer oder schneller wieder zurück, wobei sich die damit verbundene Energie in Wärme verwandelt. Der Körper leitet um so besser, je schneller das Zurückgehen erfolgt. — Nach einiger Zeit ist Alles so ausgeglichen, dass im ganzen Innern des Leiters $\mathfrak{D}$ und daher auch $\mathfrak{E}$ gleich Null sind.

Man vermag aber auch solche Bedingungen herzustellen, die es verhindern, dass $\mathfrak{E}$ im Innern eines Leiters verschwindet. Der dem $\mathfrak{E}$ entsprechende Zwangszustand $\mathfrak{D}$ ist dann wegen der Eigenschaften des Leiters in fortwährendem Zerfall, zugleich aber unter dem Einflusse der äusseren Bedingungen, durch die wir das Verschwinden von $\mathfrak{E}$ verhüten in stetiger Neubildung begriffen. Im Ganzen vermag er daher zwar ungeändert zu bleiben; aber auch in diesem Falle unterscheidet sich der Leiter erheblich von einem Dielektricum. Der immer noch stetig fortdauernde Zerfall des Zwangszustandes, der mit derselben Geschwindigkeit erfolgt, als wenn die im entgegengesetzten Sinne wirkenden Ursachen gar nicht vorhanden wären, bedingt eine Wärmeentwickelung, während mit diesen Ursachen selbst eine stetige Arbeitsleistung zur Neuschaffung der elektrostatischen Energie verbunden sein muss. Je besser der Körper leitet, d. h. je schneller der Zwangszustand im Dahinschwinden begriffen ist, desto grösser ist die Wärmeentwickelung und um so grösser muss daher auch die von jenen Ursachen gelieferte Energie sein, um die Kraft $\mathfrak{E}$ dauernd auf einer gegebenen Höhe zu erhalten.

§ 44. Elektrostatik.

Man spricht von einem Gleichgewichte der Elektricität gewöhnlich in dem Sinne, dass man dabei an eine Masse ähnlich der ponderablen Materie denkt, an der sich Kräfte im Gleichgewichte halten. Wenn man aber diese materialistische Vorstellung aufgibt, bedarf der Gleichgewichtsfall einer besonderen Definition. — Ein Dielektricum ist im elektrostatischen Gleichgewichte, wenn sich $\mathfrak{E}$ und daher auch $\mathfrak{D}$ im Laufe der Zeit nicht ändern. Bei einem Leiter müssen wir das Gleichgewicht aber anders definiren. Würden sich nämlich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ nicht ändern, so müsste, wie aus der im vorigen § gegebenen Definition des Leiters hervorgeht, der betreffenden Stelle, auf die sich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ beziehen, fortwährend Energie zugeführt werden, die sich dort in Wärme verwandelte. Wir können nun zwar einen solchen Zustand als einen constanten oder stationären, aber nicht wohl als einen Gleichgewichtszustand bezeichnen. Unter dem elektrostatischen Gleichgewichte versteht man vielmehr überall, gleichgültig welche Vorstellung man sonst mit diesem Worte verbindet, einen Zustand, bei dem keine Energieübertragungen oder Verwandlungen elektrostatischer Energie in Wärme vorkommen.

Nach der Definition des Leiters besteht der für diesen allein mögliche Gleichgewichtszustand darin, dass $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ im ganzen Inneren des Leiters gleich Null sind. Damit verschwinden auch die Divergenzen dieser Vectoren, d. h. im Gleichgewichtszustande kann im Innern eines Leiters weder freie noch wahre Elektricität enthalten sein. Wenn ein Leiter eine elektrische Ladung im Gleichgewichte enthält, kann sie daher nur an der Oberfläche ausgebreitet sein.

Wenn wir uns für den Augenblick auf den Boden der materialistischen Auffassung der Elektricitätsmengen stellen wollen, können wir die Schwierigkeit, die sich für diese Auffassung durch die Concentrirung der elektrischen Massen auf Flächen ergibt, durch die folgende Betrachtung umgehen. Dabei sei die wahre Elektricität jene Grösse, die wir uns für den Augenblick als etwas Materielles vorstellen wollen.

Nach Gleichung (119) ist $\varrho_w = \operatorname{div} \mathfrak{D}$. Nehmen wir nun an, dass $\mathfrak{D}$ wörtlich eine Verschiebung einer den ganzen Raum ausfüllenden Masse, etwa des Aethers, bedeute, so dass die durch ein Flächenstück df hindurchgetretene Aethermenge $= \mathfrak{D}\mathfrak{N} df$ wäre, so folgt aus Gleichung (101) S. 77, dass ebensoviel Aether aus einer geschlossenen Fläche herausgetreten ist, als wahre Elektricität in den umschlossenen Raum auf irgend eine Weise hereingebracht wurde. Wir werden dann dazu geführt, die wahre Elektricitätsmenge selbst als eine solche Aethermenge aufzufassen, die wir durch besondere Mittel genöthigt haben, in den betreffenden Raum einzutreten und können Gleichung (101) dahin aussprechen, dass der Aether sich stets wie eine incompressible Flüssigkeit bewegt. Wahre Elektricität ist dann nicht ein Aetherüberschuss über den normalen Inhalt des Raumes, denn ein solcher kann überhaupt nicht zu Stande kommen, wenn der Aether sich nur wie eine unzusammendrückbare Flüssigkeit verschieben kann. Es ist vielmehr jener Aetherinhalt, der durch äussere Ursachen in den Raum eingedrängt wurde und der sich durch Verdrängung des früher dort befindlichen in die Nachbarschaft unter Ueberwindung einer dieser Verdrängung sich widersetzenden elastischen Kraft Platz schaffen musste. In den Leitern treten im ersten Augenblicke ebenfalls elastische Verschiebungswiderstände auf, die aber bei guten Leitern in sehr kurzer Zeit verschwinden, so dass im Gleichgewichtsfall der Aether im Innern der Leiter nirgends an solchen in der Nachbarschaft angrenzt, der in elastischer Weise den früheren Ort wieder einzunehmen sucht. In dieser Lage ist nur der an den Grenzflächen zwischen dem Leiter und dem dielektrischen Medium vorhandene Aether. Wird der Leiter entladen, so wird die Verschiebung im Dielektricum überall rückgängig, dadurch tritt wieder Aether an den Grenzflächen in den Leiter zurück und zwar genau so viel, als auf andre Art durch die Entladung aus ihm entnommen wurde.

Betrachten wir nun ein Stück df der Oberfläche eines kugelförmigen Leiters vom Radius r und grenzen wir von df aus einen scheibenförmigen Raum ab, der sich um dh_1 in den Leiter und um dh_2 in das Dielektricum hinein erstreckt, so dass dh_1 und dh_2 senkrecht zu df stehen und das Volumen der Scheibe $= (dh_1 + dh_2)\, df$ ist. Wird die wahre Ladung der Kugel mit e bezeichnet, so kommt auf df der Betrag $edf/4\pi r^2$. Der scheibenförmige Raum enthält genau soviel Aether wie im unelektrischen Zustande. Der in der äusseren Hälfte enthaltene Aether sucht aber zum Theil in die innere Hälfte zurückzutreten und aus dieser die Menge $edf/4\pi r^2$ zu verdrängen. Es steht uns nun völlig frei, ob wir von dem Aetherinhalte der inneren Scheibenhälfte einen Theil, der gleich $edf/4\pi r^2$ ist, als die wahre Elektricität bezeichnen wollen, oder ob wir darunter eine ebensogrosse Aethermenge der äusseren Scheibenhälfte verstehen wollen, die in den Leiter zurücktreten muss, um den unelektrischen Zustand wieder herzustellen. Unter der Voraussetzung, dass dh_1 und dh_2 von vornherein gross genug gewählt waren, um mindestens die angegebene Menge $edf/4\pi r^2$ zu umschliessen, ist es ganz gleichgültig, wie gross sie im Uebrigen gemacht waren.

Verliert die geladene Kugel plötzlich die Eigenschaften eines Leiters und wird selbst zu einem Dielektricum, so hört die Möglichkeit der Entladung auf. Der elektrische Zustand bleibt dauernd erhalten, also sowohl die Verschiebung als die elektrostatische Energie im äusseren Dielektricum. Den Sitz des ganzen Zustandes bildet also offenbar dieses äussere Medium und das ist ein Grund dafür, dass wir besser die wahre Ladung in dieses Medium verlegen.

Diese ganze Betrachtung soll aber nur dazu dienen, ein anschauliches Bild zu geben und dadurch die Vorstellungen zu erleichtern, — vielleicht auch, was sich ja bei allen solchen Versinnlichungsmitteln niemals ganz umgehen lässt, sie bis zu einem gewissen Grade zu leiten. Dagegen soll keineswegs damit behauptet werden, dass der Vorgang wirklich in der geschilderten Weise erfolgt. Die Betrachtung rührt in ihren Grundzügen von Maxwell selbst her und dieser Schöpfer der modernen Elektricitätslehre hat sich zweifellos bei allen seinen Untersuchungen von der Vorstellung leiten lassen, dass $\mathfrak{D}$ eine elastische Verschiebung des Aethers ist und dass daher der Aether sich stets nur so zu bewegen vermag, dass sich seine Dichte nirgends ändert.

§ 45. Fortsetzung.

Zur weiteren Verdeutlichung des Unterschiedes zwischen wahrer und freier Elektricität betrachte man eine Metallkugel, die zunächst von einer Kugelschale aus einem dielektrischen Stoffe von der Dielektricitätsconstanten K_1 eingehüllt ist, während der ganze ausserhalb dieser Kugelschale liegende Raum bis auf weite Entfernungen von einem zweiten Medium mit der Constanten K_2 eingenommen wird.

Der Metallkugel sei die wahre Elektricitätsmenge e_w mitgetheilt. Die dielektrische Verschiebung ist dann in beiden Medien radial gerichtet und im Abstande r vom Centrum gleich $e_w/4\pi r^2$. Sie erleidet keine Stetigkeitsunterbrechung beim Uebergange aus dem inneren in das äussere Medium und die Grenzfläche beider Medien ist daher frei von wahren Ladungen. Die wahre Ladung ist vielmehr ausschliesslich auf die Grenzfläche zwischen der Metallkugel und dem an diese angrenzenden inneren Medium vertheilt. Die Verschiebungslinien strahlen von ihr nach allen Richtungen gleichmässig aus und treten im weiteren Verlaufe ohne jede Aenderung in das äussere Medium über.

Die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ erleidet dagegen beim Uebergang aus dem inneren in das äussere Medium eine Stetigkeitsunterbrechung. Unmittelbar vor der Grenzfläche (deren Radius $= r_2$ sei) im inneren Medium ist sie gleich $e_w/K_1 r_2{}^2$ (Gleichung 115, S. 91) und auf der anderen Seite nimmt sie den Werth $e_w/K_2 r_2{}^2$ an. Daraus folgt, dass die Grenzfläche der Sitz einer Ladung mit „freier“ Elektricität ist. Die Flächendichte dieser freien Ladung ergibt sich aus Gleichung (117) S. 93, wenn man sie auf einen scheibenförmigen Körper, wie er in § 44 betrachtet war, anwendet, gleich

$$\frac{e_w}{4\pi r_2{}^2}\left(\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1}\right).$$

Wenn r_1 der Radius der Metallkugel ist, lässt sich für die Flächendichte der freien Ladung an der Oberfläche dieser Kugel in derselben Weise der Werth ableiten

$$\frac{e_w}{4\pi r_1{}^2}\cdot\frac{1}{K_1}.$$

Die Summe der freien Ladungen beider Oberflächen oder die gesammte freie Ladung des ganzen Systems e_f wird hiernach

$$e_f = \frac{e_w}{K_2} \quad \ldots \ldots \quad (125)$$

d. h. das Verhältniss zwischen der wahren und der freien Ladung des ganzen Systems ist gleich der Dielektricitätsconstanten des äusseren Mediums. Wie gross die des inneren schalenförmigen Körpers ist, kommt hierfür gar nicht in Betracht.

Ist das äussere Medium Luft und setzt man für diese (durch passende Wahl der Einheiten, in denen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ auszumessen sind) $K_2 = 1$, und fügt ferner noch die Annahme hinzu, dass K eine absolute Zahl, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ also Grössen gleicher Art seien, so kann man Gleichung (125) dahin aussprechen, dass die freie Ladung des ganzen Systems in diesem Falle gleich der wahren Ladung ist. Wie ich aber schon früher bemerkte, ist die erwähnte Annahme nicht nur willkürlich, sondern auch durchaus unwahrscheinlich. Sie bildet ein Ueberbleibsel der Fernwirkungstheorie, das die Bildung klarer Begriffe erschwert und die Auseinanderhaltung von Grössen ganz verschiedener Art unmöglich macht.

Was von den Ladungen gesagt war, gilt ebenso auch von den zu ihnen gehörigen Potentialen. Das Potential der wahren Ladungen ist überall ausserhalb der Metallkugel gleich e_w/r. Das der freien Ladungen ist im inneren Medium gleich $e_w/r_2 \cdot (1/K_2 - 1/K_1) + e_w/K_1 r$ und im äusseren gleich e_f/r, d. h. gleich $e_w/K_2 r$. Für $r = r_2$ werden beide Ausdrücke einander gleich; die Differentialquotienten erleiden aber an der Grenzfläche eine Stetigkeitsunterbrechung.

§ 46. Der Condensator.

Wir erhalten einen Condensator, wenn wir das äussere Medium des im vorigen § betrachteten Systems durch einen Leiter ersetzen. Es ist nicht nöthig, den ganzen äusseren

Raum mit diesem Leiter auszufüllen, sondern es genügt schon, wenn wir das innere Medium mit einer dünnen Metallschicht bedecken, an die dann weiter nach aussen wieder Luft angrenzen kann. Die Zwischenschicht wollen wir uns sehr dünn im Vergleiche zu den Kugelradien r_1 und r_2 vorstellen. Der zu einem kleinen Oberflächenstück df gehörige Theil des Condensators kann dann ebensogut auch als Bestandtheil eines aus zwei benachbarten unendlich grossen ebenen Platten gebildeten Condensators angesehen werden.

Durch experimentelle Hülfsmittel (Elektrisirmaschine oder galvanische Säule u. s. f.) ist es möglich, eine wahre Elektricitätsmenge e_w von der äusseren Belegung auf die innere zu übertragen. Die wahre Ladung des ganzen Systems ist dann gleich Null. Der Verschiebungsfluss geht in radialer Richtung und in symmetrischer Vertheilung von der inneren zur äusseren Belegung durch die dielektrische Zwischenschicht. Im ganzen übrigen Raume sind $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ Null.

Für einen Punkt des Dielektricums im Abstande r vom Centrum hat die dielektrische Verschiebung wieder wie vorher die Grösse $e_w/4\pi r^2$. Wir achten hier, wie in den vorigen Fällen, wieder nur auf die Tensoren, da die Richtungen von vornherein gegeben sind. Für E finden wir daher $e_w/K_1 r^2$ und für das Linienintegral von $\mathfrak{E}$, d. h. für den Potentialunterschied der freien Elektricitäten zwischen beiden Belegungen $e_w/K_1 \cdot (1/r_1 - 1/r_2)$. Die freie Elektricität der ganzen inneren Belegung ist e_w/K_1 und die der äusseren ebensogross, aber negativ. Bezeichnen wir diesen Werth mit e_f, so ist der Potentialunterschied auch gleich $e_f\,(1/r_1 - 1/r_2)$.

In § 42 war gezeigt, dass man entweder die Potentiale von den freien Elektricitätsmengen nehmen und als Massen, die der Wirkung der daraus hervorgehenden Kräfte unterliegen, die wahren Elektricitätsmengen ansehen muss, oder umgekehrt, wenn die Potentialtheorie zur richtigen Darstellung der aufgespeicherten Energie führen soll. Wenden wir dies auf den Condensator an, so können wir sagen, dass die wahre Ladung e_w einem Potentialunterschiede von der Grösse

$e_w/K_1 \cdot (1/r_1 - 1/r_2)$ entspricht. Bezeichnen wir also als die Capacität des Condensators jene Grösse C, die mit dem von den freien Ladungen herrührenden Potentialunterschiede der Belegungen multiplicirt die Grösse der wahren Ladung angibt, so erhalten wir für den betrachteten Kugelcondensator

$$C = K\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = K r_1 \cdot \gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

wenn zur Abkürzung das Verhältniss zwischen dem äusseren Kugelradius und der Dicke des Dielektricums mit γ bezeichnet wird.

Allgemein empfiehlt es sich, woran hier nochmals erinnert werden soll, die Potentiale stets von den freien Elektricitätsmengen zu nehmen und als Massen, die den Kräften $\mathfrak{E}$ unterliegen, demnach stets die wahren Elektricitätsmengen anzusehen. Zunächst empfiehlt sich eine solche Festsetzung schon um Verwechselungen vorzubeugen. Abgesehen von der zu ihren Gunsten sprechenden Erwägung, die in § 42 erörtert wurde, ist aber die hier getroffene besonders noch dadurch gerechtfertigt, dass an der Grenzfläche von zwei dielektrischen Medien durch die blosse Ausbildung des elektrostatischen Feldes (durch Influenz), solange also nicht durch Vermittlung eines Leiters, der vorher an die Stelle gebracht wurde, eine Ladung unmittelbar durch Berührung mitgetheilt war, niemals wahre Ladungen auftreten können.

Ferner sei noch darauf hingewiesen, dass $C = K r_1$ wird, wenn $r_2 = \infty$ ist. Man drückt dies gewöhnlich so aus, dass für $K = 1$ die Capacität einer Kugel gleich dem Radius sei; indessen ist hierbei das über die Dimensionen von K Gesagte wohl zu beachten.

Dass die algebraische Summe der wahren Ladungen für ein vollständiges System stets gleich Null sein muss, geht schon unmittelbar aus dem Grundsatze hervor, dass die Aethermassen, durch deren Verschiebung wir uns die Ladungen hervorgebracht denken können, unzusammendrückbar sind. Von der Capacität einer isolirt aufgestellten leitenden Kugel kann man daher nur in dem Sinne reden, dass sie die eine Belegung eines Condensators bildet, dessen andere Belegung sich in grosser Entfernung befindet. Um ein vollständiges System zu erhalten, müssen wir diese äussere Belegung nothwendig mit in Rechnung ziehen. Bei der Art, wie das Experiment zur Bestimmung der Capacität der Kugel ausgeführt wird, bilden die Wände des Zimmers bezw. die im Zimmer vorhandenen Leiter die andere Belegung.

§ 47. Das Gesetz von Coulomb.

Das Coulomb'sche Gesetz bildet die experimentelle Grundlage der Fernwirkungstheorie. In der Maxwell'schen Theorie kann es dagegen als eine Folgerung aus den Annahmen abgeleitet werden, die dieser eigenthümlich sind. Es sind dies zwei Annahmen, nämlich erstens die Vorstellung über die Energievertheilung im elektrostatischen Felde, auf der die Aufstellung von Gleichung (116) beruhte und zweitens die in § 44 dargelegte Anschauung über die Eigenschaften des Vectors $\mathfrak{D}$, die in der Aussage gipfelt, dass innerhalb eines Dielektricums der Verschiebungsfluss durch eine geschlossene Fläche gleich Null ist, d. h. dass er die solenoidale Bedingung erfüllt.

Wenn diese beiden hypothetischen Grundlagen gegeben sind, gelangt man daraus zunächst zum Begriffe der freien und der wahren Elektricitätsmengen als Quellen für den Fluss der Vectoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ und dann auch, freilich mit Benutzung einer dritten Hypothese, zum Coulomb'schen Gesetze. Hierzu ist nämlich nur nöthig, den Ausdruck für die Energie des Feldes aufzustellen, das durch zwei sich gegenüber stehende Ladungen erzeugt wird und die Variation dieses Ausdruckes zu bilden, die durch eine kleine Lagenänderung der einen Ladung herbeigeführt wird. Nach dem Gesetze von der Erhaltung der Energie ist die berechnete Energieänderung ebensogross wie die Arbeit, die man zur Herbeiführung jener Lagenveränderung aufwenden muss, oder die man dabei gewinnt. Damit ergibt sich die ponderomotorische Kraft zwischen den Ladungen. Als dritte Hypothese kommt bei diesem Schlusse, wie man sieht, noch die hinzu, dass andere Energieumwandlungen ausser der zwischen der elektrostatischen Energie des Feldes und der geleisteten mechanischen Arbeit bei dem ganzen Vorgange nicht im Spiele sind.

Darum ist aber das Coulomb'sche Gesetz für die Maxwell'sche Theorie nicht minder wichtig als für die Fernwirkungstheorie. Es bestätigt, wenn auch nur in indirecter Weise, die Zulässigkeit der Hypothesen, die ihr zu Grunde liegen. Jede Theorie, die nicht zum Coulomb'schen Gesetze führte, müsste von vornherein verworfen werden. Andererseits ist es aber natürlich auch nicht als ein Vorzug der Maxwell'schen Theorie aufzufassen, dass sie das Coulomb'sche Gesetz nicht als Hypothese oder als Erfahrungsthatsache, sondern als Folgerung aus anderen Annahmen einführt. Ein Vorzug würde dies nur dann sein, wenn sich damit die Zahl der Hypothesen im Ganzen verminderte.

Dagegen ist es als ein entschiedener Vorzug dieser Ableitung zu betrachten, dass der Einfluss des Mediums, in dem sich die beiden Elektricitätsmengen gegenüberstehen, dabei sofort zur Geltung gelangt. Die Fernwirkungstheorie vermag zwar auch anzugeben, wie gross z. B. die zwischen 2 geladenen Hollundermarkkügelchen auftretenden elektrostatischen Kräfte sind, die sich im Petroleum gegenüber stehen. Sie bedarf aber dazu einer verwickelten Betrachtung, die sich auch wieder auf eine Hypothese über die Constitution der Dielektrica stützen muss.

Um die schon in ihren Umrissen beschriebene Herleitung wirklich auszuführen, stützen wir uns auf den in § 42 bewiesenen Green'schen Satz, Gleichung (120). Dabei verstehen wir, wie dort, unter U das Potential der freien und unter V das der wahren Elektricitätsmengen. Die Energie des elektrostatischen Feldes ist nach Gleichung (116), mit Beachtung des in § 42 über den zu $\mathfrak{D}''$ gehörigen Antheil Gefundenen,

$$T = \frac{1}{2}\int \mathfrak{E}\mathfrak{D}\,dv = \frac{1}{2}\int \nabla U \cdot \nabla V dv.$$

Wenn keine Leiter vorkommen, lässt sich dies, wie schon in § 42 gezeigt wurde, nach Gleichung (123) (bezw. mit Vertauschung in der Reihenfolge der Integration) auf

$$T = \frac{1}{2}\int\int \frac{\varrho_f dv}{r} \cdot \varrho_w dv$$

zurückführen. Bei einer Verschiebung, die wir dem einen Hollundermarkkügelchen so ertheilen, dass der Abstand a vom andern sich um δa vergrössert, erhalten wir die Variation von T

$$\delta T = -\frac{1}{2}\int\int \frac{\varrho_f dv}{r^2} \cdot \frac{dr}{da} \cdot \delta a \cdot \varrho_w dv.$$

Die Ladungen, bezw. ihre Raumdichten ϱ_f und ϱ_w, haben sich bei der Verschiebung nicht geändert.

Wenn das Medium nach allen Seiten unbegrenzt und K constant ist, brauchen wir nur auf die Ladungen zu achten, die an die Hollundermarkkügelchen selbst gebunden sind. Die Energie T besteht dann aus 4 Gliedern. Das erste Glied wird erhalten, wenn wir die Integrationen für die ϱ_f und ϱ_w ausführen, die beide zum ersten Kügelchen gehören. Dieses Glied trägt nichts zu δT bei, da sich die Abstände r zwischen diesen $\varrho_f dv$ und $\varrho_w dv$ nicht ändern. Dasselbe gilt von dem zweiten Gliede, das durch die Combination der Ladungen des zweiten Kügelchens unter sich gewonnen wird. Zu δT tragen daher nur die beiden anderen Glieder von T bei, bei denen die freie Ladung des ersten Kügelchens mit der wahren Ladung des zweiten und umgekehrt combinirt ist. Wenn die Kügelchen klein genug im Vergleiche zu ihrem Abstande a sind, können wir bei der Ausrechnung von δT die Entfernung r zwischen je einem $\varrho_f dv$ des einen und $\varrho_w dv$ des anderen Kügelchens gleich a setzen und umgekehrt. Wird dann noch die ganze freie Ladung des ersten Kügelchens mit e_f' bezeichnet u. s. w., so wird für eine in der Richtung von a erfolgende Verschiebung

$$\delta T = -\left(\frac{1}{2}\frac{e_f' \cdot e_w''}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{e_f'' e_w'}{r^2}\right)\delta a.$$

Für ein positives δa wird δT negativ, es wird also bei einer Vergrösserung des Abstandes eine äussere Arbeit gewonnen, d. h. die ponderomotorische Kraft besteht in einer Abstossung.

Beachtet man noch, dass nach Gleichung (125) $e_f = e_w/K$ ist, so erhalten wir für die Grösse dieser abstossenden Kraft F

$$F = \frac{e'_w e''_w}{K \cdot r^2} = K \frac{e'_f \cdot e''_f}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

Führen wir die Kügelchen, die sich zuerst in Luft gegenüber standen, nachher in Petroleum über, ohne dass sie mit einem Leiter in Berührung kommen, so verkleinert sich demnach die ponderomotorische Kraft zwischen ihnen, da K für Petroleum (und überhaupt für alle flüssigen Dielektrica) grösser als für Luft ist. Bei der Ueberführung bleiben nämlich die wahren Ladungen e_w ungeändert.

Dagegen vergrössert sich die elektrostatische Kraft F in demselben Maasse wie K, wenn wir die Kügelchen nachher wieder auf dasselbe Potential bringen, das sie in der Luft hatten. Denn das Potential ist von den freien Ladungen zu nehmen (§ 46) und für dieselbe Potentialvertheilung müssen daher die freien Ladungen, die sich in Folge des Eintauchens vermindert hatten, wieder auf den früheren Betrag gebracht werden.

Gleichung (127) spricht das Coulomb'sche Gesetz in seiner verallgemeinerten Fassung aus.

Die ganze Betrachtung ändert sich etwas, wenn die Kügelchen als Leiter aufzufassen sind. Diese Aenderung bezieht sich indessen nur auf die Beweisführung, während das Schlussergebniss davon nicht berührt wird.

In diesem Falle wenden wir den Green'schen Satz auf den ganzen Raum mit Ausschluss der Leiter an. Im Innern des Dielektricums ist dann überall $\nabla^2 V = 0$ zu setzen und Gleichung (120) ergibt hier

$$T = \frac{1}{2}\int \mathfrak{E}\mathfrak{D}\,dv = \frac{1}{2}\int \nabla U \nabla V\,dv = \frac{1}{2}\int U \mathfrak{D}\mathfrak{N}_i\,df.$$

Das letzte Integral ist auf die beiden Flächen zu erstrecken, von denen die Leiter eingehüllt werden. Aus $\mathfrak{E} = -\nabla U$ folgt $\nabla^2 U = -4\pi\varrho_f$ und $U = \int \frac{\varrho_f dv}{r}$. Da der Durchmesser der Kugeln sehr klein sein sollte, können wir bei der Integration über eine jener Flächen U als constant ansehen. Da ferner $\int \mathfrak{D}\mathfrak{N}_i df$ gleich der wahren Ladung der betreffenden Kugel ist (denn $\mathfrak{N}_i$ war bei der Anwendung des Green'schen Satzes die „innere" Normale für das Dielektricum, bedeutet also für den Kugelraum die nach aussen hin gehende), so folgt

$$T = \frac{1}{2} U_1 \cdot e_w' + \frac{1}{2} U_2 \cdot e_w''$$

$$\delta T = \frac{1}{2} e_w' \delta U_1 + \frac{1}{2} e_w'' \delta U_2 .$$

Bei Ausführung der Variation an den Mittelwerthen U_1 und U_2 von U an den Kugeloberflächen kommt man genau wieder auf den früher für δT angegebenen Werth. Das Coulomb'sche Gesetz ist demnach auch für diesen Fall eine Consequenz der Maxwell'schen Theorie.

Man hätte diese ganze Betrachtung erheblich vereinfachen können, wenn man sofort auf die Definition zurückgegriffen hätte, durch die der Vector $\mathfrak{E}$ in § 38 eingeführt wurde. Dabei wäre indessen die Schwierigkeit aufgetaucht, welche Grösse als Substrat der Kraft $\mathfrak{E}$ zu betrachten wäre. Es hat sich jetzt herausgestellt, dass dies die wahre Ladung und nicht, wie man von vornherein hätte vermuthen können, die freie Ladung ist.

§ 48. Maasseinheiten.

Die bisherigen Entwickelungen sind ganz unabhängig davon, wie gross man die Maasseinheiten für die in ihnen vorkommenden Grössen wählen will. Ich beabsichtige auch nicht, hier eine bindende Festsetzung darüber zu machen. Nur daran soll ein für alle Male festgehalten werden, dass für die der gewöhnlichen Mechanik entnommenen Grössen das Centimeter-Gramm-Secunde-System (C.-G.-S.) gewählt wird. Die Einheit der Kraft ist daher 1 dyn und die Einheit der Energie 1 erg.

Wählt man die Einheit der freien Ladung beliebig, so ist dadurch der Zahlenwerth des Coefficienten K (der Dielektricitätsconstanten für ein gegebenes Medium) nach Gleichung (127) mit bestimmt und ebenso folgt daraus die Einheit der wahren Ladung. Die verschiedenen Maasssysteme der elektrostatischen Grössen werden sich also dadurch characterisiren lassen, dass man den Werth von K für ein bestimmtes Medium angibt.

Wählt man $K = 1$ für das Vacuum, so erhält man das elektrostatische Maasssystem. Im Vacuum gibt dann die Einheit der wahren Ladung zugleich die Einheit der freien Ladung an. Es ist in beiden Fällen jene Ladung, die auf eine ihr gleiche im Vacuum im Abstande von 1 cm eine ponderomotorische Kraft = 1 dyn ausübt. Diese Wahl vereinfacht zwar die Formeln der Elektrostatik ein wenig, sie hat aber den Nachtheil, dass sie den Unterschied zwischen freien und wahren Ladungen leicht verwischt. Wir werden daher K stets beibehalten.

Viel mehr empfiehlt es sich, wie es J. J. Thomson gethan hat, als die Einheit der wahren Ladung jene anzusehen, die bei der Elektrolyse durch je ein Jon übertragen wird. Indessen lässt sich, da wir nicht genau genug über die Zahl der Jonen in einem Grammäquivalent unterrichtet sind, ihr genauer Werth vorläufig nicht feststellen. Es muss daher der Zukunft überlassen bleiben, jenen Werth von K für das Vacuum zu ermitteln, der aus dieser Festsetzung hervorgehen würde.

§ 49. Die Dimensionen der elektrostatischen Grössen.

Das Ziel der theoretischen Physik besteht darin, alle Naturerscheinungen auf die Gesetze der Mechanik zurückzuführen, bezw. die Mechanik so zu erweitern, dass sie alle Phänomene zu erklären vermag. In der Mechanik kommen drei von einander unabhängige Arten von Grössen vor, aus denen sich alle übrigen ableiten lassen. Zwei davon sind die Zeit- und die Längengrössen, als dritte Art kann man entweder Massen, Kräfte oder Energiegrössen (nach dem Vorschlage von Ostwald) wählen. Im C.-G.-S.-System ist als dritte Einheit die Masseneinheit gewählt; die Einheit der Kraft und die der Energie sind dann abgeleitete Einheiten.

An sich wäre es nun wohl möglich, dass bei einer Erweiterung des Gebiets der Mechanik auch die Zahl der von einander unabhängigen Fundamentalgrössen einer Erweiterung bedürfte. Man betrachtet es aber bis jetzt als wahrscheinlich, dass dies nicht zutrifft, dass vielmehr alle in der Physik vorkommenden Grössen aus den drei Grundmaassen abgeleitet werden können. Bis jetzt ist diese Ableitung für die elektrischen und magnetischen Grössen nicht gelungen, d. h. man kennt ihre Dimensionen noch nicht. Willkürlich hat man zwar auf zwei verschiedene Arten diese Ableitung vorgenommen. Man unterschied zwischen den Dimensionen des elektrostatischen und des elektromagnetischen Systems. Selbstverständlich kann es nur eine wahre Dimension für jede Grösse geben, woraus sofort zu schliessen ist, dass mindestens eines jener Systeme unzutreffend ist. Wahrscheinlich sind sie aber beide falsch.

Nachdem lange Zeit hindurch ein unfruchtbarer, langwieriger Streit über diese Maasssysteme ausgefochten wurde, haben sich die Ansichten darüber in den letzten Jahren geklärt. Man sah ein, dass man vorläufig ganz darauf verzichten müsse, die elektrischen Grössen auf die drei Grundmaasse der Mechanik zurückzuführen, dass man vielmehr eine vierte Grösse, die vorläufig so wie eine neue Fundamentalgrösse zu behandeln ist, hinzu nehmen muss. Es bleibt dann der zukünftigen Forschung die Entscheidung überlassen, ob diese vierte Grösse wirklich eine Fundamentalgrösse bildet, oder ob sie selbst auf die drei alten Grundmaasse der Mechanik zurückgeführt werden kann.

Es steht uns auch hier wieder die Wahl frei, welche unter den in der Elektricitätslehre vorkommenden Grössen wir als vorläufig nicht weiter ableitbare Grösse behandeln wollen. Man thut indessen am besten, hierfür K zu wählen, weil man damit zu Ergebnissen gelangt, die sich ohne Weiteres mit den früher für richtig gehaltenen des elektrostatischen Maasssystems vergleichen lassen.

Aus Gleichung (127) folgen dann sofort die Dimensionen der wahren und der freien Elektricitätsmengen, hieraus die Raumdichten der Ladungen, aus Gleichung (126) die Capacität, aus Gleichung (119) die dielektrische Verschiebung u. s. w. Ich stelle diese Dimensionen in der folgenden Tabelle zusammen.

Dimensionen der elektrostatischen Grössen.

Energie	ML^2T^{-2}
Ponderomotorische Kraft	MLT^{-2}
Wahre Elektricitätsmengen e_w . . .	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}K^{\frac{1}{2}}$
Raumdichte derselben ϱ_w	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}}T^{-1}K^{\frac{1}{2}}$
Freie Elektricitätsmengen e_f . . .	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}K^{-\frac{1}{2}}$
Raumdichte derselben ϱ_f	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}}T^{-1}K^{-\frac{1}{2}}$
Potential der freien Elektricität V .	$M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}K^{-\frac{1}{2}}$
Dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ . . .	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}K^{\frac{1}{2}}$
Elektrische Kraft $\mathfrak{E}$	$M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}K^{-\frac{1}{2}}$
Elektrostatische Capacität C . . .	$L \cdot K$
Dielektricitätsconstante K	K.

Man findet die wohl zweifellos irrthümlichen Angaben des elektrostatischen Maasssystems wieder, wenn man in dieser Liste überall K fortstreicht. Damit werden freie und wahre Elektricitätsmengen Grössen gleicher Art, ebenso die elektrische Kraft und die dielektrische Verschiebung. Dies alles ist aber willkürlich und durchaus unglaubwürdig. Wahre und freie Elektricitätsmengen sind überall und namentlich auch in Bezug auf die Dimensionen vollständig getrennt zu halten.

Zweites Capitel.

Die magnetischen Grössen.

§ 50. Die Dualität zwischen den elektrischen und den magnetischen Phänomenen.

Aus der Geometrie der Lage ist das Gesetz der Dualität oder Reciprocität wohlbekannt. Nach ihm lässt sich durch blosse Vertauschung der Worte Punkt und Ebene u. s. w. zu jedem Lehrsatze der Geometrie des Raumes, der sich nicht auf metrische Verhältnisse bezieht, ein reciproker Satz angeben. Man schreibt dies oft in folgender Form an: Durch drei $\frac{\text{Punkte}}{\text{Ebenen}}$, die keine gerade Linie gemeinsam haben, ist $\frac{\text{eine}}{\text{ein}}$, und nur $\frac{\text{eine Ebene}}{\text{ein Punkt}}$ bestimmt, $\frac{\text{die}}{\text{der}}$ den drei $\frac{\text{Punkten}}{\text{Ebenen}}$ gemeinsam zugehört.

Man erhält zwei Sätze, je nachdem man die oberhalb oder unterhalb des Striches stehenden Worte wählt. Dabei ist dies Zusammentreffen nichts Zufälliges, es entspringt vielmehr einer strengen Gesetzmässigkeit, die in den allgemeinen Eigenschaften des Raumes ihren Ursprung hat. Mit Hülfe der Lehre von den Polaren wird diese Gesetzmässigkeit bewiesen.

Eine ganz ähnliche Dualität zeigt sich in der Elektricitätslehre zwischen den elektrischen und den magnetischen Grössen. Im Allgemeinen kann man aus irgend einem Satze der Elektricitätslehre einen neuen ableiten, der ebenfalls gültig bleibt, wenn man die Begriffe Elektricität und Magnetismus (und ebenso die zugehörigen) mit einander vertauscht. Nur soweit es sich um metrische Beziehungen handelt, lässt uns diese Regel im Stiche. So entsprechen z. B. den elektrischen Leitern keine magnetischen Leiter. Die Theorie lässt die Möglichkeit magnetischer Leiter bis zu einem gewissen Grade offen, die Erfahrung hat uns aber seither keine Körper dieser

Art geliefert. Man kann sagen, dass es sich hier um eine rein metrische Beziehung handelt, insofern die magnetische Leitungsfähigkeit aller uns bekannten Körper den Werth Null hat.

Wenn nun, von solchen Fällen abgesehen, eine Dualität zwischen Elektricität und Magnetismus besteht, die durchaus an das Dualitätsgesetz der Geometrie erinnert, so wird dadurch die Vermuthung geweckt, dass die eine Dualität in der andern ihren Grund hat. Ob und wie beide näher zusammenhängen, vermag indessen vorläufig nicht entschieden zu werden.

In jedem Falle wird aber die Betrachtung durch das Bestehen dieser Dualität sehr erleichtert. Die Zahl der Thatsachen, die man auf diesem Gebiete dem Gedächtnisse einzuprägen hat, wird dadurch fast auf die Hälfte vermindert. Weit wichtiger ist aber natürlich der Gewinn, der durch die auf der einen Seite erlangte Erkenntniss sofort auch für die andere Seite erzielt wird. Es ist eins der wichtigsten Verdienste, die sich O. Heaviside um die Fortbildung der Maxwell'schen Theorie erworben hat, dass er diese Dualität scharf hervorhob und sie zum ersten Male in systematischer Weise beim Aufbau der ganzen Theorie verwerthet hat.

§ 51. **Kraft und Induction im magnetischen Felde.**

Mit Rücksicht auf die besprochene Dualität kann dieses Capitel kürzer gefasst werden als das vorhergehende: es bildet nur das magnetische Analogon zu dem vorigen.

Der elektrostatischen Kraft $\mathfrak{E}$ entspricht hier die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$, die wir im magnetischen Felde beobachten. Auch sie bringt eine Art von Verschiebung zu Stande, die man aber hier als die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ bezeichnet. Dabei wird, wie früher $\mathfrak{D}$, so hier $\mathfrak{B}$ dadurch eingeführt, dass es als der Factor bezeichnet wird, durch dessen Hinzutreten zu $\mathfrak{H}$, abgesehen von einem constanten Zahlenfactor, den wir beliebig beifügen dürfen und der nur auf die Festsetzung der Einheiten von Einfluss ist, die magnetische Energie erhalten wird. Zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ besteht in isotropen Medien die der Gleichung (114) oder (115) analoge

$$\mathfrak{B} = \mu \cdot \mathfrak{H} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (128)$$

Für anisotrope Körper gelten wieder dieselben Bemerkungen wie in § 38.

Gegenüber Gleichung (115), S. 91 der wir dem Herkommen zuliebe den Vorzug vor Gleichung (114) einräumten, wird allerdings durch Gleichung (128) eine Asymmetrie herbeigeführt, weil in dieser der Factor $1/4\pi$ fehlt. Wir hätten dies vermeiden können, wenn wir uns der Heaviside'schen Darstellungsweise angeschlossen hätten. Indessen betrifft dies nur eine Aeusserlichkeit.

Die durch Gleichung (128) definirte Grösse μ, die von dem Medium abhängt, wird die Permeabilität oder auch die Inductivität genannt. Zwischen beiden Bezeichnungen wird zuweilen ein Unterschied gemacht, insofern als man unter Permeabilität das Verhältniss μ/μ_0, wo μ_0 sich auf das Vacuum bezieht, verstanden wird. Die Permeabilität ist dann eine absolute Zahl, während die Inductivität eine physikalische Grösse von vorläufig unbekannten Dimensionen ist. Ich werde indessen einen solchen Unterschied hier nicht machen und beide Bezeichnungen als gleichwerthig ansehen. Selbstverständlich ist die Dimension von μ aber nicht zu vernachlässigen.

An Stelle von Gleichung (116), S. 92 schreiben wir hier für die Energie im Volumenelemente

$$dT = \frac{1}{8\pi}\mathfrak{B}\mathfrak{H}\,dv = \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2 dv = \frac{1}{8\pi\mu}\mathfrak{B}^2 dv \quad . \quad . \quad (129)$$

Es entspricht dies der oben für $\mathfrak{B}$ gegebenen Definition. Der Zahlenfactor 4π ist in die Definitionsgleichung aus den vorher angegebenen Gründen eingeführt.

Alles was früher über den Kraft- und den Verschiebungsfluss im elektrostatischen Felde gesagt war, lässt sich ohne Weiteres auch auf den Kraft- und Inductionsfluss im magnetischen Felde übertragen. Namentlich bleibt die Veranschaulichung, die von dem Verschiebungsflusse in § 44 gegeben wurde, ebenso auch für den Inductionsfluss anwendbar, mit dem einzigen Unterschiede, dass es nach unserer bisherigen Erfahrung in der Natur keine magnetischen Leiter gibt. Als magnetischer Leiter wäre nämlich im Anschlusse an den Begriff des elektrischen Leiters ein Körper zu verstehen, in dem sich die Energie des magnetischen Zwanges mit einer von dem Grade der Leitungsfähigkeit abhängigen Geschwindigkeit in Wärme verwandelte, so dass wir dauernd Energie zuführen müssten, um den magnetischen Zwangszustand aufrecht zu erhalten. Häufig wird das Wort freilich in einem anderen Sinne gebraucht und als magnetischer Leiter ein Körper bezeichnet, der überhaupt magnetischen Kraft- oder Inductionsfluss aufzunehmen vermag. In diesem Sinne wären aber alle uns bekannten Körper und auch das Vacuum als magnetische Leiter zu bezeichnen. Es liegt daher gar keine Veranlassung zu einer solchen missbräuchlichen (weil mit dem Begriffe des elektrischen Leiters im Widerspruche stehenden) Anwendung dieser Bezeichnung vor.

Da die Vorstellung einer Aetherverschiebung, wie sie in § 44 dargelegt wurde, mit demselben Rechte für den magnetischen Inductions- wie für den dielektrischen Verschiebungsfluss in Anspruch genommen werden kann, liegt der Verdacht nahe genug, dass sie in keinem von beiden Fällen dem wahren Mechanismus des Vorganges entspricht. Sie ist aber auch nur als ein Veranschaulichungsmittel eingeführt worden ohne jeden Anspruch darauf, dass ihr eine objective Bedeutung zukäme.

§ 52. Veränderlichkeit von μ.

Die Permeabilität μ unterscheidet sich zunächst dadurch wesentlich von ihrem elektrischen Analogon $K/4\pi$, dass sie bei den meisten Körpern nur wenig von dem Werthe im Vacuum abweicht, bei einigen, den sogenannten diamagnetischen Körpern, um eine Kleinigkeit geringer als im Vacuum, bei den magnetischen Metallen aber ganz bedeutend grösser wird und bei weichem Schmiedeeisen unter gewissen Umständen selbst einige Tausend mal so gross wird als für das Vacuum. Ausserdem ist sie aber auch, wenigstens bei den magnetischen Metallen nicht constant. Unter verschiedenen Umständen vermag sich vielmehr ihr Werth für dasselbe Material in sehr weiten Grenzen zu ändern.

Dieses Verhalten von μ hat zur Folge, dass die magnetischen Erscheinungen vielfach ein sehr verändertes Bild gegenüber den elektrostatischen darbieten und dass dadurch das enge Band zwischen den beiden Erscheinungsgruppen häufig verdeckt wird. Da es sich hierbei um metrische Beziehungen handelt, kann aber dadurch das in § 50 besprochene Reciprocitätsverhältniss nicht beeinträchtigt werden.

In einem späteren Abschnitte werde ich auf dieses Verhalten näher eingehen.

§ 53. Freier und wahrer Magnetismus.

Auch auf die Raumvertheilung der Vectoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ liessen sich die Sätze der Potentialtheorie so wie früher zur Anwendung bringen, falls wie dort vorausgesetzt werden könnte, dass nur ungeschlossene Kraft- und Inductionslinien vorkämen. Die Ausgangspunkte der Kraftlinien sind die fingirten Massen des „freien“ Magnetismus. Bezeichnen wir dessen Raumdichte mit σ_f, so ist ähnlich wie für ϱ in § 39 zu setzen

$$\sigma_f = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{H}.$$

Ebenso hat man für die Raumdichte des wahren Magnetismus durch Definition, in Anlehnung an § 41

$$\sigma_w = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{B}.$$

Nun unterscheidet sich aber das Gebiet der magnetischen Erscheinungen dadurch von dem der elektrischen, dass keine magnetischen Leiter vorkommen. Wenn daher die in § 44 entwickelte Anschauung über das Wesen der Verschiebung auf das der Induction übertragen wird, gelangen wir sofort zu dem Schlusse, dass div $\mathfrak{B}$ gleich Null sein muss, d. h. dass **in der Natur wahrer Magnetismus überhaupt nicht vorkommt.** Die magnetischen Inductionslinien sind also sämmtlich in sich geschlossene Linien. Aufgaben, wie sie im vorhergehenden Capitel aus dem Gebiete der Elektrostatik behandelt wurden, bei denen stets vorausgesetzt wurde, dass geschlossene Kraftlinien nicht vorhanden wären, sondern dass alle im Felde vorhandenen von elektrischen Ladungen ausgingen, fallen daher in der Lehre vom Magnetismus vollständig fort. Die Kräfte lassen sich nicht mehr in dem ganzen Gebiete von einem Potential ableiten (in einzelnen Theilen des Gebietes, z. B. in dem Luftraum ausserhalb eines Stahlmagneten ist dies zwar immer noch möglich), oder mit anderen Worten curl $\mathfrak{B}$ oder curl $\mathfrak{H}$ ist nicht mehr im ganzen Gebiete gleich Null.

Die Aussage, dass σ_w stets und überall gleich Null ist, oder mit andern Worten, dass in der Natur nur in sich geschlossene Inductionslinien auftreten können, ist eine der wichtigsten der Maxwell'schen Theorie in ihrer heutigen Fassung. In gewissem Sinne bildet sie eine neue Hypothese, insofern wenigstens, als angenommen wird, dass magnetische Leiter in der Natur überhaupt nicht vorkommen. Im andern Falle wäre wahrer Magnetismus möglich und man könnte durch Lostrennen eines Theiles von einem magnetisirten magnetischen Leiter einen unipolaren Magneten erhalten, d. h. einen Körper, der sich im magnetischen Felde genau so verhielte, wie ein elektrisch geladenes Hollundermarkkügelchen im elektrostatischen Felde. Dies alles widerspricht aber der Erfahrung und man kann sagen, dass die Aussage $\sigma_w = 0$ den Ausdruck dieser Erfahrung bildet.

§ 54. Kraft- und Inductionsfluss an der Grenze zweier Medien.

An der Grenzfläche zweier Medien mit den Permeabilitäten μ' und μ'' sei ein Flächenstück df abgegrenzt. $\mathfrak{R}'$ sei die in das erste Medium hinein gerichtete Normale und $\mathfrak{N}'' = -\mathfrak{N}'$. Die Induction $\mathfrak{B}'$ unmittelbar bei df im ersten Medium zerlegen wir in die Normalcomponente $\mathfrak{B}_n'$ und die Tangentialcomponente $\mathfrak{B}_t'$. Dieselben Zerlegungen seien auch mit $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$ vorgenommen.

Aus der im vorigen § begründeten Aussage, dass überall

$$\sigma_w = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, div $\mathfrak{B} = 0$ ist, folgt zunächst sofort

$$\mathfrak{B}_n' = \mathfrak{B}_n'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

Grenzen wir nämlich einen scheibenförmigen Raum ab, dessen Mittelschnitt die Fläche df bildet und dessen zu df senkrechte Dicke unendlich klein zweiter Ordnung angenommen wird, so liefert die Anwendung von Gleichung (101) S. 77 auf diesen Raum (da nur die beiden zu df parallelen Bodenflächen in Betracht kommen und div $\mathfrak{B} = 0$ ist)

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{N}'df + \mathfrak{B}''\mathfrak{N}''df = 0.$$

Das scalare Product $\mathfrak{B}'\mathfrak{N}'$ gibt aber den Tensor von $\mathfrak{B}_n'$ an und ebenso $\mathfrak{B}''\mathfrak{N}'$ oder $-\mathfrak{B}''\mathfrak{N}''$ den von $\mathfrak{B}_n''$, falls eine mit $\mathfrak{N}'$ zusammenfallende Richtung der $\mathfrak{B}_n$ als positiv betrachtet wird. Da nun $\mathfrak{B}_n'$ und $\mathfrak{B}_n''$ jedenfalls gleich gerichtet sind und da sie auch, wie sich hier zeigte, gleiche Tensoren haben, so ist die durch Gleichung (131) ausgesprochene Behauptung bewiesen.

Falls, wie wir annehmen, beide Medien isotrop sind, ist überall $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B}$ gleich gerichtet und $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$. Aus Gleichung (131) folgt dann, dass

$$\mu'\mathfrak{H}_n' = \mu''\mathfrak{H}_n'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

ist, d. h. die Normalcomponente von $\mathfrak{H}$ erleidet an der Oberfläche eine Stetigkeitsunterbrechung, indem sich ihr Werth beim Uebergang umgekehrt proportional zur Permeabilität ändert.

Dieselbe Betrachtung bleibt übrigens auch dann noch anwendbar, wenn wir an Stelle der plötzlichen Aenderung von μ einen allmählichen Uebergang an der Grenzfläche voraussetzen, wie es im Allgemeinen einfacher ist und zweifellos auch der Wahrheit besser entspricht. Man kann sich dann in der Uebergangsschicht Flächen von gleicher Permeabilität construirt denken. Gleichung (131) gilt dann in der ganzen Uebergangsschicht, wenn unter $\mathfrak{N}$ die Normale zu diesen Flächen verstanden wird. Der vorher plötzliche Uebergang von $\mathfrak{H}_n'$ in $\mathfrak{H}_n''$, wie er durch Gleichung (132) ausgesprochen wird, vertheilt sich hier auf die ganze Schichtdicke, ohne dass dadurch etwas am Endresultate geändert wurde.

Setzt man in der Gleichung div $\mathfrak{B} = 0$ für $\mathfrak{B}$ den Werth $\mu \mathfrak{H}$ ein und führt die Operation div nach Gleichung (78) S. 61 aus, so erhält man

$$\mu \operatorname{div} \mathfrak{H} + \mathfrak{H} \cdot \nabla \mu = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

oder, wenn man div $\mathfrak{H}$ durch $4\pi\sigma_f$ ersetzt und nach σ_f auflöst,

$$\sigma_f = -\frac{\mathfrak{H} \nabla \mu}{4\pi\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

wofür auch $\sigma_f = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B} \nabla \frac{1}{\mu}$ geschrieben werden kann.

Freier Magnetismus kann daher überall in der Natur nur dort vorkommen, wo sich μ ändert. Mit Rücksicht darauf, dass nach § 18 der Vector $\nabla \mu$ senkrecht zu den Flächen gleicher Permeabilität steht und daher $\mathfrak{H}_t \nabla \mu$ Null ist, lässt sich Gleichung (134) übrigens auch ersetzen durch

$$\sigma_f = -\frac{\mathfrak{H}_n \nabla \mu}{4\pi\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134^a)$$

Bei ausschliesslich tangentialem Kraftflusse tritt daher an der Grenzfläche zweier Medien kein freier Magnetismus auf.

Um zu erkennen, wie sich die tangentialen Componenten von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ beim Durchgange durch die Grenzfläche ändern, lege ich in beliebiger Richtung eine Ebene durch die Normalen $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ und betrachte die Schnittfigur, die diese Ebene mit dem vorher besprochenen scheibenförmigen Raume bildet. Sie bildet ein Rechteck, von dem zwei Seiten unendlich klein erster Ordnung sind, wovon eine im Medium 1 und die andere im Medium 2 verläuft, während die beiden anderen Seiten von der zweiten Ordnung unendlich klein sind und die Grenzschicht durchkreuzen. Auf den Umfang und die Fläche dieses Rechtecks wende ich den durch Gleichung (90) ausgesprochenen Satz von Stokes an. Falls in dem scheibenförmigen Raume überall curl $\mathfrak{H} = 0$ ist, d. h. falls in diesem Raume $\mathfrak{H}$ von einem Potentiale abgeleitet werden kann, muss nach diesem Satze das Linienintegral $\int \mathfrak{H} d\mathfrak{s}$ über den Rechtecksumfang gleich Null sein. Dies gilt für jede Stellung der durch die Normale $\mathfrak{N}$ geführten Schnittebene; daraus folgt, dass unter der bezeichneten Voraussetzung

$$\mathfrak{H}_t' = \mathfrak{H}_t'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

ist. Da die Fläche des Rechtecks unendlich klein zweiter Ordnung ist, gilt diese Gleichung bis auf unendlich kleine Grössen auch dann noch, wenn curl $\mathfrak{H}$ nicht Null, aber auch nicht sehr gross im Vergleiche zu $\mathfrak{H}$ ist. Wie sich später zeigen wird, trifft der hier ausgeschlossene Fall dann ein, wenn sich in der Grenzschicht eine Oberflächenvertheilung elektrischer Ströme concentrirt. In diesem Falle wird daher Gleichung (135) ungültig. In jedem andern Falle können wir aus Gleichung (135) weiter schliessen, dass

$$\mathfrak{B}_t' : \mathfrak{B}_t'' = \mu' : \mu'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

ist. Eine stetige Aenderung von $\mathfrak{H}_t$ beim Durchgange durch die Grenzfläche, wie wir sie als Regel zu betrachten haben, die nur in gewissen Fällen eine Ausnahme erleidet, hat also eine sprungweise Aenderung von $\mathfrak{B}_t$ zur Folge, so jedoch, dass sich diese plötzliche Aenderung nur auf den Tensor und nicht auf die Richtung von $\mathfrak{B}_t$ bezieht. In dem scheibenförmigen Raume an der Grenzfläche ist daher curl $\mathfrak{B}$ nicht Null, sondern sehr gross im Vergleich zu $\mathfrak{B}$ selbst, wenn curl $\mathfrak{H}$ Null ist. $\mathfrak{B}$ kann daher in diesem Raume nicht von einem Potentiale abgeleitet werden, wenn dies von $\mathfrak{H}$ zutrifft. Auf jeder Seite der Grenzschicht für sich genommen, bleibt dies dagegen noch möglich: das μ-fache des Potentials von $\mathfrak{H}$ (falls ein solches besteht) gibt dann auf jeder Seite das von $\mathfrak{B}$ an.

§ 55. Magnetisch weiche und magnetisch harte Körper.

Ein Körper werde als magnetisch weich bezeichnet, wenn innerhalb desselben curl $\mathfrak{H}$ überall gleich Null ist, falls er sich im elektrischen Gleichgewichte (§ 44) befindet. Die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ kann unter dieser Voraussetzung in dem Körper von einem Potentiale abgeleitet werden. In der Fernwirkungstheorie wird dies stillschweigend von allen Körpern vorausgesetzt. Der Erfahrung nach trifft es bei der Mehrzahl der Körper zu, aber nicht bei allen.

Es muss nämlich auch magnetisch harte Körper geben, wie ich bei einer anderen Gelegenheit nachwies, also solche, in denen curl $\mathfrak{H}$ auch bei elektrischem Gleichgewichte nicht verschwindet, in denen sich also $\mathfrak{H}$ auch in diesem Falle nicht mehr von einem Potentiale ableiten lässt.

Um dies zu beweisen, ist es nur nöthig, die in § 42 für die elektrostatischen Vectoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ durchgeführten Betrachtungen auf die magnetischen Vectoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$, für die sie ebenso gültig bleiben, zu übertragen. Nach Gleichung (129) S. 123 ist die magnetische Energie im Volumenelement gleich $1/8\pi \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{H} \cdot dv$. Zerlegen wir wie in § 42 $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}''$, so ist, da wahrer Magnetismus nicht möglich ist, $\mathfrak{B}'$ gleich Null, d. h. $\mathfrak{B}$ hat von vornherein den Werth $\mathfrak{B}''$. Nehmen wir nun an, dass im ganzen magnetischen Felde nur magnetisch weiche Körper vorkommen, die sich im elektrischen Gleichgewichte befinden, so muss curl $\mathfrak{H}$ überall Null sein. Zerlegen wir daher den ganzen Raum in ringförmige Röhren, die dem Laufe der Inductionslinien folgen, so finden wir, wie in § 42, dass das Integral

$$\frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{B}''\mathfrak{H}\, dv$$

für jede Röhre und daher für das ganze Feld zu Null wird. Da aber zur Energie jedes Volumenelement im Ganzen genommen nur einen positiven Beitrag liefern kann, so muss, wenn die Energie für den ganzen Raum zu Null wird, sie auch für jedes Volumenelement verschwinden, d. h. in einem

Felde, das nur aus magnetisch weichen Körpern im elektrischen Gleichgewichte gebildet ist, kann kein magnetischer Kraft- oder Inductionsfluss bestehen.

Die Erfahrung lehrt aber, dass es Körper gibt — in erster Linie nämlich die Stahlmagnete —, die auch bei elektrischem Gleichgewichte einen magnetischen Kraftfluss aufrecht zu halten vermögen. Diese sind also in dem hier definirten Sinne magnetisch hart, d. h. die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ kann in ihnen nicht von einem Potentiale abgeleitet werden, es kommen vielmehr in einem Systeme, das Stahlmagnete oder überhaupt remanente Magnete enthält, stets geschlossene Kraftlinien vor.

Zur Fernhaltung von Missverständnissen sei noch darauf hingewiesen, dass die soeben durchgeführte Schlussweise, dass $\mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{H}$ überall Null sein müssen, wenn das Raumintegral ihres scalaren Productes verschwindet, nur deshalb zulässig ist, weil $\mathfrak{B}''$ das ganze $\mathfrak{B}$ angibt, so dass $\mathfrak{B}'' = \mu\mathfrak{H}$ gesetzt werden kann. Das scalare Product $\mathfrak{B}''\mathfrak{H}$ geht dadurch in $\mu\,(\mathfrak{H})^2$ über und dass eine Summe von lauter Quadraten nur dann verschwinden kann, wenn jedes Glied zu Null wird, ist ohne Weiteres klar. In § 42 hätte man dagegen nicht ebenso schliessen dürfen, dass $\mathfrak{D}''$ und $\mathfrak{E}$ überall Null sein müssten, weil dort $\mathfrak{D}''$ nur einen Theil des ganzen Verschiebungsflusses ausmachte.

Ausdrücklich sei übrigens noch bemerkt, dass die Unterscheidung zwischen weichen und harten Körpern ebenso auch bei den dielektrischen Medien gemacht werden könnte. Wir haben wenigstens die Möglichkeit im Auge zu behalten, dass es auch dielektrische Medien geben könnte, die sich gegen den elektrischen Kraft- und Verschiebungsfluss ebenso verhielten, wie die verschiedenen Eisensorten gegen den magnetischen Kraft- und Inductionsfluss. Auf den ersten Blick hat diese Annahme sogar viel Wahrscheinlichkeit für sich, wenn man das dielektrisehe Verhalten der Krystalle, namentlich die pyroelektrischen Erscheinungen verfolgt. Der Turmalin ist schon oft mit einem Magnete verglichen worden.

Man hätte dabei nur zu beachten, dass der Vorgang auf dem elektrischen Gebiete mit der Möglichkeit einer Leitung der Elektricität complicirt ist. In der That sieht man leicht ein, dass z. B. ein Stahlmagnet sehr bald an der Oberfläche mit einer Schicht von wahrem Magnetismus belegt würde, die den Inductionsfluss aus dem Inneren des Magneten vollständig abfinge, falls die Luft, wenn auch nur in geringem Grade, (oder eine sich auf der Oberfläche condensirende Feuchtigkeitsschicht u. s. w.) magnetisch zu leiten vermöchte. Aeusserlich wäre von dem remanenten Magnetismus dann gar nichts mehr wahrzunehmen; es könnte aber sein, dass etwa bei einer Erwärmung, bei der wir alle magnetischen Leiter sorgfältig fern hielten, eine Veränderung in dem remanenten Inductionsflusse erfolgte, während die an der Oberfläche angesammelten wahren magnetischen Ladungen verhindert wären, sich damit ins Gleichgewicht zu setzen. Die Folge der Erwärmung wäre daher ein Uebertreten der Inductionslinien in den vorher davor geschirmten äusseren Raum, d. h. wir hätten damit ein magnetisches Analogon zur Pyroelektricität construirt.

Auch die Rückstandsbildungen bei der Entladung von Condensatoren könnten von einer „dielektrischen Härte" (analog der magnetischen Härte) herrühren und man könnte das Fehlen einer dauernden „Dielektrisirung" damit begründen, dass alle Dielektrica (mit Ausnahme des Vacuums) zugleich, wenn auch nur in sehr geringem Grade elektrisch leiten.

So nahe aber auch alle diese Annahmen liegen, so muss man doch auf die durch sie gebotenen Erklärungen jener noch wenig verstandenen Erscheinungen verzichten. Namentlich muss man sich hüten, den sonst sehr treffend gewählten Vergleich des Turmalins mit einem Magneten dahin zu erweitern, dass man nach dem Reciprocitätsgesetze zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen den einen in strengem Sinne als zugeordnet zu dem andern betrachtete.

Verwehrt wird uns dies durch das Gesetz von der Erhaltung der Energie. Stellen wir uns nämlich vor, dass in einem Systeme, das sich in stationärem Zustande, namentlich also auch im magnetischen Gleichgewichte (vgl. die Definition des elektrischen Gleichgewichts in § 44) befindet, geschlossene Kraftlinien $\mathfrak{E}$ vorkämen, so könnten wir in einen Hohlraum, der einer solchen geschlossenen Kraftröhre folgte, ein mit wahrer Elektricität geladenes Hollundermarkkügelchen einsetzen und erhielten damit ein Perpetuum mobile. Das Kügelchen würde nämlich, wenn es die geschlossene Kraftlinie als Bahn verfolgte, unausgesetzt im Sinne der Kraft weiter gehen und es würde daher unaufhörlich Arbeit geleistet, die nach aussen entnommen werden könnte, ohne dass irgend ein Aequivalent dafür aufgewendet würde. (Vgl. indessen hierzu § 82; auf die thermoelektrischen und die übrigen eingeprägten Kräfte ist bei dieser Betrachtung keine Rücksicht genommen.)

Wir können daher nicht annehmen, dass im Zustande magnetischen Gleichgewichtes geschlossene elektrische Kraftlinien in einem Systeme auftreten könnten, d. h. wir müssen annehmen, dass alle nichtleitenden Körper dielektrisch weich sind. So lange keine magnetischen Ströme vorkommen, lässt sich also die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ stets von einem einwerthigen Potentiale ableiten, wie es von der Fernwirkungstheorie von vornherein vorausgesetzt wird.

Man könnte vielleicht meinen, dass der auf Grund des Energieprincips gegebene Beweis für die Unmöglichkeit geschlossener elektrischer Kraftlinien bei magnetischem Gleichgewichte ebenso auch gegen den im Eingange dieses § nachgewiesenen Schluss sprechen müsse, dass nämlich im Innern von Stahlmagneten auch bei elektrischem Gleichgewichte geschlossene magnetische Kraftlinien bestehen. In der That gleichen sich beide Fälle sonst vollkommen, es besteht nur der Unterschied, dass auf der magnetischen Seite dem elektrisch geladenen Hollundermarkkügelchen kein Analogon zur Seite gestellt werden kann, da wahrer Magnetismus in der Natur nicht vorkommt (vgl. § 53). Dieses Fehlen des wahren Magnetismus hat daher einerseits, wie aus dem im Anfange des § gegebenen Beweise hervorgeht, zur Folge, dass die Vertheilung der Kraft $\mathfrak{H}$ in einem Stahlmagnete auch bei elektrischem Gleichgewichte nicht wirbelfrei (also von einem Potentiale ableitbar) sein kann und sie verhindert andererseits zugleich auch, dass eine wirbelartige Vertheilung von $\mathfrak{H}$ mit dem ersten Hauptsatze der Energetik in Widerspruch geräth.

Auch gegen die wirbelartige Vertheilung der elektrischen Verschiebung in den Uebergangsschichten, die wir in § 40 nachwiesen, lässt sich diese Schlussweise nicht anwenden, da nach den auf Gleichung (123) S. 103 folgenden Bemerkungen die ponderomotorischen Kräfte stets so zu berechnen sind, dass sie von freien Ladungen ausgehen und auf wahre Ladungen einwirken. Sobald sich daher $\mathfrak{E}$ von einem Potentiale ableiten lässt, ist ein solches Perpetuum mobile unmöglich, wenn auch $\mathfrak{D}$ eine wirbelartige Vertheilung besitzt.

§ 56. Vergleich mit der Fernwirkungstheorie.

Die zwischen zwei Magneten auftretenden Kräfte sind derart vertheilt, als wenn sie von positiven und negativen magnetischen Massen ausgingen, die Fernkräfte nach dem Coulomb'schen Gesetze auf einander ausübten. Es handelt sich hier darum, zu zeigen, wie die Vertheilung dieser Massen gewählt werden muss, damit übereinstimmende Ergebnisse erhalten werden.

Wir stellen uns der Einfachheit wegen nur zwei Magnete M_1 und M_2 vor, die aufeinander wirken. Bei einer bestimmten Lage kann dann nach unserer Auffassung die gesammte magnetische Energie zerlegt werden in die Bestandtheile T_1 und T_2, die sich auf die von den Magneten selbst eingenommenen Räume beziehen und den Bestandtheil T, der sich auf den Luftraum bezieht. Bei einer Lagenänderung der Magnete M_1 und M_2 möge sich deren Energieinhalt T_1 bezw. T_2 nicht ändern, so dass nur die Aenderung von T in Betracht kommt. In der That wird auch in der Fernwirkungstheorie bei der Betrachtung der Kräfte zwischen zwei Magneten vorausgesetzt, dass die beiden Magnete sich in ihrer Magnetisirung gegenseitig nicht beeinflussen, dass sie, wie man sagt, starr magnetisirt sind.

Die ponderomotorischen Kräfte, die wir zwischen den Magneten annehmen, müssen nun jedenfalls die Bedingung erfüllen, dass für jede beliebige Lagenänderung die von ihnen geleistete Arbeit gleich der Aenderung der magnetischen Energie, also da T_1 und T_2 unveränderlich bleiben sollten, gleich der Aenderung von T sein muss. Je zwei Systeme von Kräften, die diese Bedingungen erfüllen, sind (nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten) einander mechanisch äquivalent.

Nach Gleichung (129) S. 123 ist T, von einem constanten Coefficienten abgesehen, gleich dem über den ganzen Raum, mit Ausschluss der Magnete M_1 und M_2 selbst genommenen Integrale aus dem scalaren Producte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$, also

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{B}\mathfrak{H}\, dv.$$

Jedenfalls ist aber die Luft ein magnetisch weicher Körper. Setzen wir also elektrisches Gleichgewicht voraus, so ist in dem ganzen Raume, auf den sich T bezieht, sowohl $\mathfrak{B}$ als $\mathfrak{H}$ wirbellos vertheilt. Aehnlich wie in § 42 $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, können wir daher hier $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ von Potentialen ableiten, die jetzt allerdings nur für den Luftraum gültig bleiben.

Setzen wir im Luftraume

$$\mathfrak{H} = -\nabla U \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = -\nabla V$$

und wenden den Green'schen Lehrsatz (Gleichung 120) S. 100 an, so erhalten wir

$$\int \mathfrak{B}\mathfrak{H}\, dv - \int U \operatorname{div} \mathfrak{B}\, dv - \int U \mathfrak{B}\mathfrak{N}_i\, df = 0.$$

Das zweite Glied dieser Gleichung fällt aber hier fort, da nach der Grundlage der Theorie überall $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ ist. Hiermit geht der für T vorher aufgestellte Werth über in

$$T = \frac{1}{8\pi}\int U \mathfrak{B}\mathfrak{N}_i\, df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

Die Integration ist auf die Grenzen des Luftraums, also auf die Oberflächen der beiden Magnete und auf die den ganzen Raum von aussen umschliessende Fläche zu erstrecken. Falls äussere Störungen (z. B. das magnetische Feld der Erde) fern gehalten sind, kommt aber das zuletzt genannte Integral nicht weiter in Betracht, wenn wir uns die äussere Grenzfläche weit genug abliegend denken, so dass $\mathfrak{B}$ und U auf ihr überall verschwinden.

Gleichung (137) lehrt uns daher, dass die im Luftraume aufgespeicherte Energie demselben Betrage nach in jeder Lage auch dadurch gefunden wird, dass man eine Massenvertheilung von wahrem Magnetismus von der Grösse $\mathfrak{B}\mathfrak{N}_1/4\pi$ auf der Oberfläche jedes Magneten annimmt und als Kraft, die an der Einheit dieser Massen wirkt, $\mathfrak{H}$ ansieht. Denn aus den auf den jetzigen Fall sofort übertragbaren Bemerkungen, die auf Gleichung (122) S. 102 folgten, geht sofort hervor, dass die äussere Arbeit, die geleistet werden muss, um die Massen — aus unendlicher Ferne her — an ihre Stellen zu bringen und dabei die proportional mit den jeweiligen Massenanhäufungen wachsenden Kräfte $\mathfrak{H}$ zu überwinden, durch den angegebenen Ausdruck richtig dargestellt wird. Demnach ist auch, wie es vorher verlangt war, die einer beliebigen Lagenveränderung der Magnete entsprechende Aenderung in der potentiellen Energie gleich der Arbeit der an den fingirten Massen wirkenden Kräfte.

Es bleibt nun noch übrig, eine Vertheilung **freier** magnetischer Massen anzugeben, die zu dem Potentiale U im Luftraume und dem daraus entspringenden Kraftflusse $\mathfrak{H}$ führt. Aus den Sätzen der Potentialtheorie (§ 37) ergibt sich diese Massenvertheilung leicht, wenn der Kraftfluss zu einem Potentiale gehört und im ganzen Raume als gegeben angesehen werden kann. Hier haben wir aber mit der Schwierigkeit zu kämpfen, dass die Kraft $\mathfrak{H}$ überhaupt nicht im ganzen Raume von einem Potentiale abgeleitet werden kann (§ 55). Zerlegen wir also $\mathfrak{H}$ in eine wirbelfreie und in eine solenoidal vertheilte Componente, so vermögen wir vorläufig nur jene

Massenvertheilung zu finden, die zur ersten Componenten gehört.

Diese lässt sich leicht ermitteln. Nach Gleichung (134) haben wir für die Raumdichte des freien Magnetismus

$$\sigma_f = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B} \cdot \nabla \frac{1}{\mu}.$$

Im Innern der Eisenmassen können wir μ als constant ansehen. Dort ist daher, wie sich schon in § 55 ergab, σ_f überall gleich Null. Die freien magnetischen Massen vertheilen sich ausschliesslich über die Grenzschichten, in denen μ schnell bis auf den Werth μ_0, den es in der Luft annimmt, zurückgeht. Um zu berechnen, wie gross der freie Magnetismus ist, der zu einem Flächenelemente df der äusseren Grenzfläche des Magneten gehört, betrachte ich eine Inductionsröhre, die durch den Umriss von df geführt ist. Ein Volumenelement dieser Röhre, das in der Grenzschicht liegen möge, kann gleich qdz gesetzt werden, wenn q den senkrecht zu $\mathfrak{B}$ gezogenen Querschnitt der Inductionsröhre und dz den Abstand zwischen zwei auf einander folgenden Querschnitten bedeutet. Fassen wir diesen Abstand als Vectorgrösse auf, so ist er mit $d\mathfrak{z}$ zu bezeichnen; da er mit $\mathfrak{B}$ gleich gerichtet sein soll, haben wir

$$Bd\mathfrak{z} = \mathfrak{B}dz.$$

Der Inhalt an freiem Magnetismus in dem beschriebenen Volumenelemente ist gleich

$$\sigma_f q dz = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B} \cdot \nabla \frac{1}{\mu} q dz = \frac{1}{4\pi} B q d\mathfrak{z} \cdot \nabla \frac{1}{\mu}.$$

Um die ganze zu df gehörende Masse zu erhalten, haben wir diesen Ausdruck über die Dicke der Uebergangsschicht zu integriren. Dabei ist aber Bq wegen der solenoidalen Vertheilung von B constant; das Product gibt die „Zahl der Inductionslinien“ an, die schliesslich durch die äussere Grenzfläche, also durch df in den Luftraum übertreten. Demnach ist

$$Bq = \mathfrak{B}\mathfrak{N}_1 df$$

wo $\mathfrak{N}_i$, wie in Gleichung (137) (deren Ableitung zu Folge) die innere Normale für den Luftraum, für den Eisenraum also die nach aussen gerichtete Normale bedeutet.

Nach § 18 stellt ferner $d\mathfrak{z} \cdot \nabla \frac{1}{\mu}$ die Aenderung von $1/\mu$ für eine Verschiebung um $d\mathfrak{z}$ dar. Für den Uebergang durch die ganze Grenzschicht ist daher das Integral davon gleich $1/\mu_0 - 1/\mu$. Zur Fläche df gehört also eine in der Uebergangsschicht enthaltene Belegung mit freiem Magnetismus von der Grösse

$$\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{N}_i}{4\pi} df \cdot \frac{\mu - \mu_0}{\mu \mu_0}.$$

Die Belegung mit freiem Magnetismus ist also der vorher gefundenen Belegung mit wahrem Magnetismus, an der die ponderomotorischen Kräfte angreifen, proportional und sie wird aus dieser durch Multiplication mit $(\mu - \mu_0)/\mu \mu_0$ gefunden. Führt man, wie es später (in § 94) geschehen wird, noch einen mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ gleichgerichteten Vector $\mathfrak{J}$ (die „Intensität der Magnetisirung") ein, der durch

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{B} \frac{\mu - \mu_0}{4\pi \mu \mu_0}$$

definirt ist, so lässt sich abgekürzt für die auf der Flächeneinheit der Magnetoberfläche enthaltene Menge an freiem Magnetismus auch

$$\mathfrak{J}\mathfrak{N}_i$$

setzen. — Es könnte scheinen, als wenn die Aufgabe hiermit völlig gelöst wäre und gerade weil diese Vermuthung dem an die Vorstellungsweise der Fernwirkungslehre Gewöhnten so nahe liegt, war es nöthig, etwas näher darauf einzugehen. In Wirklichkeit trifft dies aber gar nicht zu, weil sich zu dem von einer Massenvertheilung ableitbaren, wirbelfrei vertheilten Kraftflusse nothwendig noch ein solenoidal vertheilter hinzugesellt, über den die vorhergehende Betrachtung nichts auszusagen vermag.

Aus diesem Grunde sei jetzt die ganze Frage noch einmal von einer andern Seite her behandelt. Im Luftraume lassen sich sowohl $\mathfrak{H}$ als $\mathfrak{B}$ von einem Potentiale herleiten; wir wollen jetzt annehmen, dass dies auch im Innern der Magnete zutreffe, indem wir eine passende Raumvertheilung nicht nur freier, sondern auch wahrer magnetischer Massen im Magnetkörper fingiren. Für uns, die wir das Auftreten wahrer magnetischer Massen als unvereinbar mit den Naturgesetzen ansehen, ist es zwar von vornherein ausgemacht, dass der sich hieraus ergebende Kraft- und Inductionsfluss im Innern der Magnete unmöglich mit der Wirklichkeit übereinstimmen kann. In Wahrheit kommt es aber jetzt auch nur auf das Feld im Luftraume an, da sich nur die in diesem aufgespeicherte Energie bei Verschiebungen der Magnete ändert, wenn wir diese als „starr magnetisirt" ansehen, wie es bei den Betrachtungen über die Kraftäusserungen zwischen Magneten gebräuchlich ist.

Damit sich $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ überall von demselben Potentiale ableiten lassen, ist es nöthig, dass wir μ als constant ansehen. Wir ersetzen also gewissermassen den Eisenkörper des Magneten durch einen Luftraum, in dem an passenden Stellen wahre und freie magnetische Massen aufgehäuft sind und begnügen uns damit, wenn der hierdurch erzeugte Kraftfluss überall im äusseren Raume mit dem wirklich vorhandenen identisch ist. Von selbst hat dies dann weiter zur Folge, dass auch die ponderomotorischen Kräfte, die sich unter dieser Annahme ergeben, für jeden Magneten mechanisch äquivalent sind mit den daran thatsächlich auftretenden.

Mit anderen Worten heisst dies, dass wir uns im Uebrigen jetzt völlig auf den Standpunkt der Fernwirkungstheorie stellen und nur an Stelle des Coulomb'schen Gesetzes den Ausdruck für die magnetische Energie im Volumenelemente des Luftraumes der Betrachtung zu Grunde legen, dabei zugleich noch an dem Unterschiede zwischen wahrer und freier Elektricität und zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ festhalten. Indessen ist jetzt überall $\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H}$, daher auch $\operatorname{div} \mathfrak{B} = \mu_0 \operatorname{div} \mathfrak{H}$, so dass der genannte Unterschied sich nur noch auf die Dimensionen der Grössen und nicht mehr auf ihre numerischen Werthe bezieht.

In dem soeben näher beschriebenen Falle können wir den Green'schen Lehrsatz auf den ganzen Raum mit Einschluss des Innern der Magnete anwenden. Das darin vorkommende Oberflächenintegral fällt nun fort und wir finden

$$\int \mathfrak{B}\mathfrak{H}\, dv = \int U \operatorname{div} \mathfrak{B}\, dv.$$

Mit $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 4\pi\sigma_w$ (nach § 53) erhalten wir demnach für die magnetische Energie im ganzen Raume

$$T = \tfrac{1}{2}\int U\sigma_w dv.$$

Das ist aber die mechanische Arbeit, die geleistet werden muss, um die Massen $\sigma_w dv$ im Kraftfelde, dessen Potential U ist und das mit den Massen proportional anwächst, an ihre Stelle zu bringen. Daraus folgt, dass für jede Lagenänderung die von den ponderomotorischen Kräften geleistete Arbeit dadurch gefunden wird, dass man annimmt, an der Einheit der Massen $\sigma_w dv$ wirke überall die Kraft $-\nabla U$. Das Potential U gehört aber zur Vertheilung der Massen σ_f und zwar so, dass überall $\sigma_w = \mu_0 \sigma_f$ ist. Im magnetischen Maasssysteme ist $\mu_0 = 1$; vernachlässigt man ausserdem willkürlich die Dimension von μ_0, so sind die Massen, an denen die Kräfte $-\nabla U$ angreifen, überall identisch mit jenen, die das Kraftfeld erzeugen. Damit sind wir völlig bei der Darstellungsweise der Fernwirkungslehre angelangt und es zeigt sich, dass das Coulomb'sche Gesetz — denn dieses ist in den letzten Aussagen enthalten — aus der Maxwell'schen Annahme über die Vertheilung der magnetischen Energie hergeleitet werden kann, ja dass selbst eine Verbindung der Vorstellungen über die Fernwirkung und über die Maxwell'sche Energievertheilung bis zu einem gewissen Grade möglich ist.

Mit der Maxwell'schen Theorie in ihrer heutigen Fassung, für die $\operatorname{div} \mathfrak{B}$ unbedingt überall Null ist, verträgt sich freilich keine der beiden vorhergehenden Darstellungsweisen. Maxwell selbst hat sich auf dem magnetischen Gebiete noch vielfach der älteren Theorie angeschlossen; erst die Fortbildung seiner Theorie durch seine Nachfolger liess den weitklaffenden Unterschied zwischen den beiden Anschauungsweisen hervortreten. Für die Fernwirkungstheorie bildet die Möglichkeit des Auftretens von wahrem Magnetismus die Grundbedingung, während im Gegensatze hierzu die moderne Kraftlinienlehre des Magnetismus, wie sie sich aus der Maxwell'schen Theorie herausgebildet hat, es als ein Naturgesetz ansieht, dass nur geschlossene Inductionslinien möglich sind. Beide stehen daher in einem principiellen Gegensatze zu einander, der jede Vereinigung ausschliesst, sobald wir den Inductionsfluss im Innern der Magnete zur Betrachtung heranziehen; im äusseren Raume kann dagegen auch von der Darstellungsweise der Fernwirkungslehre unbedenklich überall Gebrauch gemacht werden, sobald sich ein Nutzen daraus ergibt. Nöthig ist dann nur, dass man dessen eingedenk bleibt, dass es sich hierbei nur um fingirte Massenvertheilungen handelt, die nach aussen hin den verlangten Erfolg herbeiführen, im Innern der Magnete aber zu Abweichungen führen.

Anmerkung. Bei der Entwickelung, die zu Gleichung (137) führte, nahm ich an, dass $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ sich im Luftraume von einem eindeutigen Potentiale ableiten liessen. Schon im Texte erwähnte ich, dass dazu jedenfalls elektrisches Gleichgewicht vorausgesetzt werden muss. Aber auch in diesem Falle trifft die Annahme nicht immer zu. Da die Luft zweifellos magnetisch weich ist, wird zwar curl $\mathfrak{B}$ und curl $\mathfrak{H}$ in ihr dann stets zu Null. Trotzdem können in ihr geschlossene Kraft- und Inductionslinien auftreten, nämlich dann, wenn der von der Luft eingenommene Raum ein zwei- oder mehrfach zusammenhängender ist und wenn der übrigbleibende, ebenfalls mehrfach zusammenhängende Raum von einem magnetisch harten Körper (Stahl) eingenommen wird, in dem $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ nicht wirbelfrei vertheilt sind. Aus dem Stokes'schen Satze, Gleichung (90), geht dies sofort hervor. Das Linienintegral wird verschieden von Null für einen den magnetisch harten Körper umschlingenden Integrationsweg, weil jede Fläche, die wir durch die Linie legen, den magnetisch harten Körper durchkreuzen muss.

Um ein Beispiel hierfür zu erhalten, denke man sich einen remanenten Ringmagnet, in dem ein ringförmiger Kanal ausgebohrt ist, dessen Achse mit der Ringachse zusammenfällt. In diesem Luftraume haben wir auch bei elektrischem Gleichgewicht geschlossene Kraft- und Inductionslinien.

Die vorhergehende Entwicklung bezog sich in stillschweigender Voraussetzung nur auf gewöhnliche Stabmagnete, die einen einfach zusammenhängenden Raum einnehmen. — In dem zuletzt besprochenen Falle wird die Behandlung mit Hülfe der Fernwirkungslehre überhaupt unmöglich. Da wir die Fernwirkungstheorie des Magnetismus als unzulänglich verwerfen, brauchte hierauf im Texte nicht näher eingegangen zu werden; es handelte sich nur darum, zu zeigen, wie in den Fällen, die die Fernwirkungstheorie überhaupt zu beherrschen vermag, der Uebergang von unserer Darstellungsweise zu dieser bewirkt werden kann.

§ 57. Die Dimensionen der magnetischen Grössen.

Aus Gleichung (129) S. 123, in der die Dimension der Energie dT bekannt ist, könnte man leicht die Dimensionen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ ermitteln, wenn die von μ bekannt wäre. Setzt man willkürlich die Dimension von μ zu Null, so erhält man das sogenannte magnetische Maasssystem. Dieses gibt aber die wahren Dimensionen der physikalischen Grössen ebensowenig richtig an, wie das elektrostatische Maasssystem mit $K = 1$. Behalten wir μ bei, so werden die Dimensionen:

Magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ . . . . $\mu^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$

Magnetische Induction $\mathfrak{B}$ . . . . . $\mu^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$.

Bis zu einem gewissen Grade unabhängig von der Frage der Dimensionen ist die Wahl der Einheiten für die Ausmessung der Grössen. Man kann, wie im magnetischen Maasssysteme, der Permeabilität μ im Luftraume den numerischen Werth 1 beilegen, ohne darum etwas über die Dimensionen von μ auszusagen. Dadurch sind die Einheiten von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ in Uebereinstimmung mit dem magnetischen C.-G.-S. festgelegt.

Drittes Capitel.

Wechselbeziehungen zwischen Elektricität und Magnetismus.

§ 58. Art dieser Beziehungen.

Die elektrostatischen und die rein magnetischen Vorgänge laufen, wie sich zeigte, vollständig parallel mit einander, nur mit dem einen wichtigen Unterschiede, dass in der Natur zwar elektrische Leiter und daher wahre elektrische Ladungen, aber keine magnetischen Leiter (im eigentlichen Sinne dieses Wortes) und darum auch keine wahren magnetischen Ladungen vorkommen. Ausser diesen, auf einen gemeinsamen Ursprung beider Erscheinungsgruppen hinweisenden Dualitätsbeziehungen besteht aber noch ein wechselseitiger Zusammenhang derart, dass gewisse Erscheinungen der einen Gruppe nothwendig mit solchen der andern Gruppe verbunden sind, wobei auch hier eine strenge Reciprocität hervortritt.

Man hat diese Erscheinungen die „elektromagnetischen“ wegen des Doppelgesichts, das sie uns zeigen, genannt. Diese Bezeichnung hat namentlich den Vorzug, dass sie die beiden Seiten der Sache als gleichwerthig hervorhebt und nicht auf die Vorstellung hindrängt, dass die eine als untergeordnet zur andern aufzufassen sei. Ein Beispiel wird dies näher zeigen. Der durch einen Draht fliessende elektrische Strom übt nach der Fernwirkungstheorie in seiner Umgebung magnetische Kräfte aus und zwar wird in diesem Zusammenhange der Strom als die Ursache oder als das primär Gegebene und die magnetische Kraft als die daraus hervorgehende Wirkung angesehen. Ja, nach der Fernwirkungstheorie spielt die magnetische Kraft eine so untergeordnete Rolle, dass ihr Auftreten davon abhängt, ob in der Nähe des Drahtes ein Magnet oder doch ein magnetisirbarer Körper (d. h. einer, dessen Permeabilität von der der Luft verschieden ist) vorhanden ist. Ganz anders ist dagegen der Zusammenhang nach der Maxwell'schen Theorie. Ueberall wo elektrische Ströme vorhanden sind, bildet sich auch ein magnetisches Feld aus, welcher Art auch die Körper in der Nähe sein mögen. Dabei ist nicht der Strom als Ursache und das magnetische Feld als Folge anzusehen, sondern beides, der Zerfall und die daneben hergehende Neubildung des elektrostatischen Zwangszustandes, die den Strom im Leiter ausmachen, einerseits (vgl. § 43), wie das magnetische Feld andererseits bedingen sich gegenseitig.

Bei den heutigen Vertretern der Maxwell'schen Theorie macht sich sogar meist die Tendenz bemerkbar, das Verhältniss gradezu umzukehren, also den Zustand des Mediums in der Umgebung des Leiters als das Wesentliche und als die Ursache für den im Drahte stattfindenden Vorgang anzusehen. Indessen ist dies nach meiner Ueberzeugung kaum mehr gerechtfertigt als die entgegengesetzte Auffassung der Fernwirkungslehre. Es mag zwar sein, dass diese besonders von Lodge, Poynting, Heaviside und anderen englischen Physikern vertretene Ansicht dem wahren Verhältnisse in der Natur entspricht; vorläufig thut man aber jedenfalls besser, den Zustand des Feldes in der Umgebung des Drahtes und den Vorgang im Drahte selbst als coordinirte Erscheinungen aufzufassen.

§ 59. **Elektrischer Strom und magnetisches Feld.**

Rein statische Zustände elektrischer oder magnetischer Art haben keine nothwendigen Beziehungen zu einander. Dagegen ist jede Aenderung des elektrischen oder magnetischen Zustandes mit einer Erscheinung der anderen Gruppe verknüpft, mag nun diese Aenderung in einer blossen Ortsänderung oder in einer Zustandsänderung der davon betroffenen Körper bestehen oder sich aus beiden combiniren.

Alle diese Wechselbeziehungen lassen sich auf zwei einfache Gesetze zurückführen, die durch zwei nach dem Dualitätsgesetz sich gegenseitig entsprechende Gleichungen ausgesprochen werden. Zu ihrer Ableitung müssen wir uns auf die Erfahrung berufen. Hier haben wir es zunächst mit dem magnetischen Felde zu thun, das einen Leitungsstrom umgibt. Die Erfahrung lehrt, dass ein sehr langer, geradliniger constanter Strom von der Stärke I von einem magnetischen Felde umgeben wird, dessen Kraftlinien Kreise sind, deren Mittelpunkte auf der Drahtachse liegen. Im senkrechten Abstande a von der Drahtachse erlangt die Feldintensität $\mathfrak{H}$ den Tensor

$$H = \frac{2I}{a} \quad \ldots \ldots \quad (138)$$

In der That beruht die gebräuchlichste Art, die Stärke eines constanten Leitungsstromes zu messen, auf der Beobachtung des von ihm herrührenden magnetischen Feldes und wir können daher Gleichung (138) als ein unmittelbar durch die Erfahrung geliefertes Naturgesetz ansehen. Hinzuzufügen ist noch, dass die Beziehung zwischen H und I ganz unabhängig von den durch die Constanten K und μ ausgedrückten Eigenschaften des Mediums ist.

Gleichung (138) liefert zugleich die Definition für die Einheit des Leitungsstroms und lässt die Dimensionen von I erkennen. Aus der in § 57 aufgestellten Dimension von $\mathfrak{H}$ folgt nämlich mit Rücksicht auf Gleichung (138):

$$\text{Dimension von } I = \mu^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Andererseits wissen wir aus der Erfahrung, dass ein Strom I, der durch einen Draht der einen Belegung eines Condensators zugeleitet wird, die wahre Ladung dieser Belegung im Zeitelemente dt um Idt vermehrt. Diese Erfahrung bildet das Bindeglied zwischen den elektrostatischen und den elektrodynamischen Erscheinungen. Wir erhalten daher noch einen zweiten Ausdruck für die Dimension von I, wenn wir die in § 49 festgestellte Dimension von e_w durch die Zeit T dividiren, also

$$\text{Dimension von } I = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2} K^{\frac{1}{2}}.$$

Aus dem Vergleiche der beiden Ausdrücke ergibt sich die wichtige Beziehung

$$\mu K = L^{-2} T^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

Das Product der beiden Constanten μ und K eines Mediums hat demnach die Dimensionen des Reciproken eines Geschwindigkeitsquadrats. Da μ und K für ein gegebenes Medium völlig bestimmte Werthe sind, muss auch die hiermit gegebene Geschwindigkeit einen genau bestimmten Werth für das Medium besitzen. Es ist, wie hier vorweg bemerkt sein mag, die Geschwindigkeit, mit der sich elektromagnetische Störungen fortpflanzen. Bezeichnen wir sie mit v, so lässt sich Gleichung (139) auch schreiben

$$\mu K v^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

Wenn die Dimension einer der beiden Constanten μ und K ermittelt würde, wäre damit nach Gleichung (139) auch die der anderen bekannt. Ferner können wir durch passende Wahl der Maasseinheiten einer der beiden Constanten einen beliebigen Werth (speciell den Werth 1 für den Luftraum) beilegen, wie es früher besprochen war. Dadurch ist aber der Werth der anderen Constanten für dasselbe Medium nach Gleichung (140) zugleich mit bestimmt, da v eine für das Medium charakteristische Geschwindigkeit bedeutet.

§ 60. Ableitung der ersten Hauptgleichung.

Aus Gleichung (138) folgt

$$H 2 \pi a = 4 \pi I.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt das Linienintegral des Vectors längs einer (den Draht umkreisenden) geschlossenen Kraftlinie dar. Ausserhalb des stromführenden Drahtes ist, falls keine magnetisch harten Körper vorkommen, curl $\mathfrak{H}$ überall Null (§ 55) und daher ist auch das Linienintegral von $\mathfrak{H}$ für jede geschlossene Curve gleich Null, falls diese die Strombahn nicht umschlingt. Bedeutet also in Abbildung 10 A den

Querschnitt durch den geradlinigen Leitungsdraht, $BCDEFB$ den längs einer Kraftlinie gehenden Integrationsweg und $BCDEGHB$ einen durch Zufügung der Fläche $EGHBFE$ aus dem vorigen abgeleiteten Integrationsweg, so muss für diesen das Linienintegral von $\mathfrak{H}$ immer noch gleich $4\pi I$ sein, da es für die geschlossene Curve $EGHBFE$ zu Null wird. Daraus folgt, dass für jede beliebig gestaltete, in sich geschlossene und den Stromleiter A einmal umschlingende Curve das Linienintegral von $\mathfrak{H}$

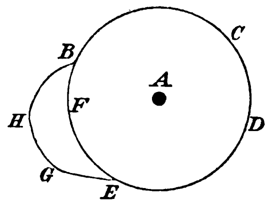


Abb. 10.

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 4\pi I \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

ist. — Bisher war vorausgesetzt, dass der Draht auf eine im Vergleiche zum Abstande a sehr grosse (eigentlich unendlich grosse) Länge geradlinig sei, und dass die übrigen zur Herstellung eines geschlossenen Stromkreises erforderlichen Zuführungsdrähte als unendlich entfernt angesehen werden könnten. Gleichung (141) gilt aber auch dann noch, wenn dies nicht mehr zutrifft. Falls nämlich ein linearer Leiter einen endlichen Krümmungshalbmesser besitzt, können wir zuerst zur Ableitung des Linienintegrals von $\mathfrak{H}$ eine Kraftlinie $BCDEF$ (Abb. 10) von unendlich kleinem Radius wählen. Im Verhältnisse zu diesem Radius ist der Krümmungshalbmesser als unendlich gross, d. h. die Stromcurve in dem in Frage kommenden Bezirke als gradlinig anzusehen und die Gleichung (141) bleibt wie vorher anwendbar. Durch Anfügung weiterer Stücke, wie $BHGE$ in Abbildung 10, können wir aber den vorigen Integrationsweg in einen beliebig gestalteten anderen von endlichen Abmessungen transformiren, ohne an dem Werthe des Linienintegrals etwas zu ändern.

Haben wir es schliesslich nicht mit einem linearen Stromkreise, sondern mit einem stromdurchflossenen Leiter zu thun, dessen Querschnittsabmessungen von derselben Grössenordnung sind wie der Krümmungshalbmesser seiner Mittellinie, so lässt sich derselbe vermittelst einer Untertheilung des Querschnitts in unendlich kleine Flächenelemente auf ein Bündel von Leitern, die sich alle in der Richtung der Stromlinien erstrecken, zurückführen, so dass für jeden einzelnen unter ihnen die vorige Betrachtung anwendbar bleibt. Hierbei ist zu beachten, dass $\mathfrak{H}$ ein Vector, dass also das zu dem ganzen Strome gehörige $\mathfrak{H}$ an jeder Stelle des Feldes gleich der Vectorsumme der Elementarwirkungen ist. Aus dieser Betrachtung ergibt sich sofort, dass auch in diesem Falle Gleichung (141) zutrifft. Zugleich erhalten wir noch das weitere Resultat, dass für eine im Innern des Leiters verlaufende Integrationslinie in Gleichung (141) unter I nur jener Theil des ganzen Stromes zu verstehen ist, der von dem Integrationswege umschlungen wird.

Bei diesen Betrachtungen läuft die bisher nicht ausdrücklich ausgesprochene Vorstellung mit, dass der elektrische Strom in einem Leiter eine räumlich vertheilte Vectorgrösse ist. Schon aus den in § 43 durchgeführten Betrachtungen, in denen der Begriff des elektrischen Leiters erörtert wurde, wird man zu dieser Anschauung geführt, da der elektrische Leitungsstrom hiernach durch die beiden anderen Vectorgrössen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ (ausserdem auch durch die Eigenschaften des Mediums) bedingt ist. Ferner wird sie durch die im vorigen § erwähnte Erfahrung über den Zusammenhang zwischen der Stromstärke und der elektrostatischen Ladung bestätigt. Den strengsten Ausdruck findet diese Aussage aber durch das Ohm'sche Gesetz, zu dessen Aufstellung ich alsbald übergehen werde.

Vorher sei noch darauf hingewiesen, dass I bei den vorhergehenden Betrachtungen den Gesammtbetrag des im Drahte herrschenden Stromes bedeutete. Der Vector, aus dem sich I durch eine Summirung ergibt, d. h. die elektrische Strömung an einer bestimmten Stelle des Raumes sei jetzt mit $\mathfrak{i}$ und der Tensor davon daher mit i bezeichnet. Falls $\mathfrak{i}$ über den ganzen Querschnitt des Drahtes dieselbe Richtung (nämlich die der Mittellinie) hat, wird I aus i gefunden durch

$$I = \int i df,$$

wobei die Integration über den ganzen Querschnitt auszudehnen ist. Diese Gleichung lehrt uns, in welchen Einheiten i zu messen ist, wenn die von I festgesetzt sind, und welche Dimensionen ihm zukommen (vgl. hierzu § 59). Sollte dagegen, wie es bei schnell veränderlichen Strömen in Drähten vorkommt, $\mathfrak{i}$ nicht über den ganzen Querschnitt gleich gerichtet sein, oder sollte die Fläche des Querschnitts nicht genau rechtwinklig zur Drahtachse gezogen sein, so ist unter I das Flächenintegral des Vectors $\mathfrak{i}$ zu verstehen, also (vgl. § 30)

$$I = \int \mathfrak{i}\mathfrak{N} df \quad \ldots \ldots \quad (142)$$

In einer Beziehung leidet die Fassung, die wir dem jetzt zu untersuchenden Naturgesetze in Gleichung (141) gegeben haben, noch einen Mangel. Es ist nämlich nicht darauf Rücksicht genommen, dass bei schnell veränderlichen Strömen für die Fortpflanzung der Störungen (also der elektromagnetischen Wellen) ein Zeitaufwand in Aussicht zu nehmen ist, dass also in einem gegebenen Augenblicke der auf der linken Seite der Gleichung vorkommende Vector $\mathfrak{H}$ und die Stromintensität auf der rechten Seite nicht immer genau genug correspondirende Werthe darstellen. Um dies zu vermeiden und zugleich um den einfachsten mathematischen Ausdruck für jenes Naturgesetz zu finden, gehen wir aus der ein Integralgesetz aussprechenden Formel (141) zu dem zugehörigen Differentialgesetze über, indem wir diese Formel nur auf ein im Innern des Leiters oder auch ausserhalb desselben liegendes Flächenelement df und seine Umgrenzung anwenden.

Hiermit verbindet sich aber zugleich eine wichtige Umgestaltung der Form von Gleichung (141). Nach dem Stokes'schen Satze (§ 30, S. 70) lässt sich nämlich das Linienintegral von $\mathfrak{H}$ ersetzen durch curl $\mathfrak{H} \cdot \mathfrak{N} df$, während zugleich die rechte

Seite von Gleichung (141) in $4\pi\mathfrak{i}\mathfrak{N}df$ übergeht. Bei Anwendung von Gleichung (141) auf einen unendlich kleinen Bezirk, d. h. durch den Uebergang aus dem Integral- zu dem Differentialgesetze erhalten wir daher als eine neue Form unseres Naturgesetzes die Gleichung

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{N}=4\pi\mathfrak{i}\mathfrak{N}.$$

Hierbei ist noch zu untersuchen, ob die auf beiden Seiten der Gleichung vorkommende Einheitsnormale $\mathfrak{N}$ jedesmal denselben Vector darstellt, d. h. ob nicht etwa die aus zwei von einander völlig unabhängigen Entwickelungen übernommenen $\mathfrak{N}$ entgegengesetzten Richtungen der Normalen zur Fläche df entsprechen.

Bei Aufstellung von Gleichung (138) wurde nur auf die Tensoren des elektrischen Stromes und der magnetischen Kraft geachtet und nur nebenbei bemerkt, dass die Richtungen dieser beiden Vectoren senkrecht zu einander stehen. Gleichung (138) und die ganze sich daran schliessende Entwickelung bedarf daher noch einer Ergänzung, so dass die Richtung von $\mathfrak{H}$ eindeutig gefunden werden kann, wenn die von $\mathfrak{i}$ gegeben ist. Dazu dient die Ampère'sche Regel, wonach für den in der Stromrichtung Schwimmenden $\mathfrak{H}$ stets von rechts nach links gerichtet erscheint. Bezeichnet man den vom Mittelpunkte der Fläche df nach dem Umfange gehenden Radiusvector, wie in § 30 mit $\mathfrak{a}$, so lässt sich die Ampère'sche Regel auch dahin ausdrücken, dass die Aufeinanderfolge $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{i}$ ein Rechtssystem im Raume bildet.

Beachtet man nun, dass auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung $\mathfrak{N}$, wie aus Gleichung (142) hervorgeht, mit $\mathfrak{i}$ gleichgerichtet zu nehmen ist, während auf der linken Seite nach § 30, S. 69 die Aufeinanderfolge $\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{a}$, $\mathfrak{N}$, also auch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}$ ein Rechtssystem im Raume ergibt, so folgt durch den Vergleich mit der Ampère'schen Regel sofort, dass in der That $\mathfrak{N}$ in beiden Fällen derselben Normalenrichtung zugehört.

Trotzdem würde es voreilig sein, wenn man nun in der vorhergehenden Gleichung den Factor $\mathfrak{N}$ einfach streichen wollte. Die Gleichung sagt vielmehr zunächst nur dies aus, dass die Projection von curl $\mathfrak{H}$ auf die Normalenrichtung 4π mal so gross und ebenso gerichtet ist wie die Projection von $\mathfrak{i}$. Nun gilt dies aber für jede beliebige Normalenrichtung, denn wenn auch bei Ableitung von Gleichung (141) ursprünglich vorausgesetzt war, dass der Integrationsweg senkrecht zur Stromrichtung stehe, so konnte doch mittelst der durch Abbildung 10 erläuterten Transformation die Gestalt des Integrationswegs so geändert werden, dass er aus der zur Stromrichtung senkrechten Ebene beliebig heraustrat. Diese Erwägung führte schon zu der in Gleichung (142) gegebenen Rechenvorschrift für die Ableitung von I aus den $\mathfrak{i}$, während im andern Falle I durch eine rein numerische Summirung gefunden wird.

Da also für alle Normalenrichtungen, bezw. für alle zugehörigen Stellungen des Flächenelementes df die Projectionen von curl $\mathfrak{H}$ und $4\pi\mathfrak{i}$ gleich sein müssen, so folgt, dass diese beiden Vectoren nothwendig auch selbst gleich sind, d. h. dass man in der That in der vorhergehenden Gleichung auf beiden Seiten den Factor $\mathfrak{N}$ streichen darf.

Das Differentialgesetz für den Zusammenhang zwischen einem Leitungsstrome und dem ihm zugehörigen Felde wird daher durch die Gleichung ausgesprochen:

$$\text{curl}\,\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

Der bessern Unterscheidung wegen wollen wir sie die erste Hauptgleichung des Elektromagnetismus nennen.

Ausdrücklich sei aber noch darauf hingewiesen, dass, wie aus einer im Eingange dieses § gemachten Bemerkung hervorgeht, diese Gleichung nur im Innern magnetisch weicher Körper gültig bleibt. Bei der Besprechung der „eingeprägten" Kräfte im nächsten Abschnitte wird sich zeigen, wie sie in magnetisch harten Körpern zu modificiren ist.

§ 61. Das Ohm'sche Gesetz.

Die bekannteste, wenigstens die in den elementaren Lehrbüchern der Physik gebräuchlichste Formulirung des Ohm'schen Gesetzes

$$I = \frac{E}{R} \qquad (144)$$

wobei E „eine elektromotorische Kraft", d. h. in den gewöhnlich vorkommenden Fällen eine Potentialdifferenz zwischen den Enden eines Leiters, oder allgemeiner das Linienintegral der von uns mit $\mathfrak{E}$ bezeichneten elektrischen Kraft für die betreffende Drahtlänge und R den „Widerstand" bedeutet, stellt ebenso wie Gleichung (141) im vorhergehen § ein Integralgesetz dar. Ebenso wird über die Richtung von I explicit nichts ausgesagt, wenn auch aus dem Zusammenhange folgt, dass I bei isotropen Körpern mit der Richtung des grössten Potentialgefälls (falls keine inducirten Kräfte wirken), oder allgemeiner mit der Richtung von $\mathfrak{E}$ zusammenfällt.

Das Ohm'sche Gesetz bildet wie das Oerstedt-Ampère'sche Gesetz (wenn diese Bezeichnung für Gl. 141 zulässig ist, Angesichts des Biot-Savart'schen Gesetzes, das nur eine andere Aussageform des ersteren ist) eine reine Erfahrungsthatsache und eine solche lässt sich wortgetreu nur durch ein Integralgesetz zum Ausdrucke bringen. Für die weitere Verwerthung eignen sich aber weit besser die Differentialgesetze, die man erhält, wenn man jene Integralgesetze auf unendlich kleine Gebietstheile anwendet. Sie sind nicht nur in jeder Hinsicht besser zur Anwendung geschickt, sondern geben überdies das Naturgesetz stets in strengerer Fassung wieder, da bei unendlich kleinen Gebietstheilen eine Reihe möglicher Complicationen vermieden wird, deren ausdrückliche Ausschliessung bei Leitern von endlichen Abmessungen nicht in allen Fällen zulässig ist.

In Form einer Differentialbeziehung erhält man das Ohm'sche Gesetz, wenn man einen unendlich kleinen cylindrischen Raum im Innern des Leiters abgrenzt, so dass die

Cylindererzeugenden mit der Richtung von $\mathfrak{E}$ und daher auch von $\mathfrak{i}$ zusammenfallen und die Formel (144) hierauf zur Anwendung bringt. Für R ist hier $\frac{l}{kf}$ zu setzen, wenn k die specifische Leitungsfähigkeit, l die Länge und f den Querschnitt bedeutet. Für E haben wir $\mathfrak{E}l$ und für I den Werth $\mathfrak{i}f$ einzuführen. Gleichung (144) geht dadurch über in

$$\mathfrak{i} = k \cdot \mathfrak{E} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{i}}{k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

Ein Differentialgesetz stellt diese Gleichung, obschon sie keine Differentialien oder Differentialquotienten enthält, deshalb dar, weil sie sich nur auf eine Stelle des Raumes bezieht und daher unmittelbar nur auf unendlich kleine Gebietstheile zur Anwendung gebracht werden kann.

Ausdrückliche Voraussetzung für die Gültigkeit von Gleichung (145) ist übrigens die isotrope Beschaffenheit des Leiters. Bei äolotropen Körpern, wie bei den Krystallen, ist $\mathfrak{i}$ eine lineare Vectorfunction von $\mathfrak{E}$, wie hier nebenbei bemerkt werden mag, obschon ein näheres Eingehen auf solche Fälle den gesteckten Rahmen überschreiten würde.

Dagegen ist k eine für jedes Material constante Grösse, insofern wenigstens, als es ganz unabhängig von $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{i}$ ist. Es ändert sich wohl mit der Temperatur des Körpers, mit dem Drucke und vor allem mit der chemischen Zusammensetzung, ist aber von den elektromagnetischen Feldgrössen direct ganz unabhängig. Nur eine indirecte Abhängigkeit kann insofern stattfinden, als durch den Strom Wärme u. s. w. erzeugt und dadurch secundär k beeinflusst wird.

§ 62. Das Joule'sche Gesetz.

Schon die in § 43 gegebene Definition des Leiters schliesst eine Wärmeentwickelung in dem elektrisch durchströmten Leiter in sich. Ueber ihre Grösse gibt entweder die unmittelbare Erfahrung Aufschluss oder man vermag sie auch aus dem Ohm'schen Gesetz abzuleiten, sobald man die Erfahrung hinzunimmt, dass ein elektrischer Strom, der durch einen Draht fliesst die wahre Ladung einer Condensatorbelegung, an der der Draht endet, proportional zur Stromstärke verändert.

Im Zeitelemente dt beträgt nämlich die Ladungszunahme, wenn der Strom nach der Belegung hinfliesst, Idt. Nach § 42 kann der Energieaufwand, der mit der Bewegung dieser Elektricitätsmenge in dem Kraftfelde $\mathfrak{E}$ verbunden ist, dadurch berechnet werden, dass wir Idt mit dem zu $\mathfrak{E}$ gehörigen Potentialunterschiede multipliciren, der bei dem Transporte der Elektricitätsmenge überwunden wird. Begnügen wir uns damit, den Transport von Idt durch ein bestimmtes Stück der Drahtleitung vom Widerstande R ins Auge zu fassen, so haben wir es nur mit solchen Kräften $\mathfrak{E}$ zu thun, die durch den Widerstand selbst bedingt sind, d. h. von denen die zu ihrer Ueberwindung verbrauchte Arbeit an Ort und Stelle zur Aufrechterhaltung des Zwangszustandes unter Wärmeentwickelung verwendet wird. Nach dem Ohm'schen Gesetze ist der Potentialunterschied an den Enden des Drahtstückes $E = IR$ und die im Zeitelemente dt entwickelte Joule'sche Wärme daher $I^2R\,dt$, woraus, wenn die in der Secunde entwickelte Wärmemenge mit Q bezeichnet wird, das Integralgesetz

$$Q = I^2R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (146)$$

folgt. Die Einheit, in der Q auszumessen ist, wird durch die Gleichung mit definirt.

Daraus lässt sich leicht, wie im vorigen §, das zugehörige Differentialgesetz

$$Q = \mathfrak{E}\mathfrak{i} = \frac{\mathfrak{i}^2}{k} = k \cdot \mathfrak{E}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147)$$

ableiten, wobei sich indessen jetzt Q auf die in der Volumen- und zugleich in der Zeiteinheit entwickelte Wärme bezieht.

Einen anderen Werth von Q erhält man durch die folgende Entwickelung. Nach Gleichung 116, S. 92 ist die durch den elektrostatischen Zwang im Volumenelemente dv aufgespeicherte Energie

$$dT = \frac{K}{8\pi}\mathfrak{E}^2 dv.$$

Im Zeitelemente dt wird ein Bruchtheil dieser Energie, so wie es in § 43 erläutert wurde, in Wärme verwandelt. Es hängt von dem Grade der Leitungsfähigkeit des Körpers ab, wie gross dieser Bruchtheil ist. Setzen wir ihn gleich

$$\frac{dt}{\tau}\frac{K}{8\pi}\mathfrak{E}^2 dv,$$

so ist τ eine der Leitungsfähigkeit des Körpers unter sonst gleichen Umständen umgekehrt proportionale, im Allgemeinen endliche Zeitdauer, nämlich jene Zeit, in der die Energie des elektrostatischen Zwangszustandes vollständig in Wärme verwandelt würde, wenn kein Ersatz stattfände und der Process der Umwandlung in gleich bleibender Intensität während τ fortdauerte. An Stelle von Gleichung (147) erhalten wir auf Grund dieser Ueberlegung unmittelbar

$$Q = \frac{K}{8\pi\tau}\mathfrak{E}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (148)$$

Die Gleichung unterscheidet sich von der früheren dadurch, dass die Materialconstante k durch den Werth $K/8\pi\tau$ ersetzt ist. Beide Coefficienten müssen daher einander gleich sein und wir finden

$$k = \frac{K}{8\pi\tau} \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{K}{8\pi k} \quad \ldots\ldots \quad (149)$$

Diese Betrachtung zeigt uns deutlich, wesshalb im elektrostatischen Maasssysteme dem specifischen Widerstande $1/k$ die Dimension einer Zeit beigelegt werden musste, denn er wird zu einer Grösse gleicher Art mit τ, sobald man die Dimension von K vernachlässigt.

§ 63. Andere Form der ersten Hauptgleichung.

Ersetzt man in Gleichung (143) $\mathfrak{i}$ durch den sich aus dem Ohm'schen Gesetze, Gleichung (145), ergebenden Werth, so geht sie über in

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = 4\pi k\mathfrak{E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

Wie die ursprüngliche Gleichung (143) gilt diese indessen nur für den Fall, dass ausschliesslich Leitungsströme vorkommen.

§ 64. Der wahre Strom.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, gehört es zu den wesentlichen Grundlagen der Maxwell'schen Theorie, dass sie neben die Leitungsströme die Verschiebungsströme stellt, die durch Aenderungen der elektrostatischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ in einem Dielektricum gebildet werden. Selbst in den Leitern gehen nach dieser Theorie bei veränderlichen Zuständen Verschiebungsströme vor sich, die sich mit den Leitungsströmen zu einer gemeinsamen Wirkung vereinigen. Beide gehen überdies auch aus derselben Quelle hervor, denn wie sich aus der Besprechung der Strombildung in § 43 ergibt, entsteht auch der Leitungsstrom durch ein Dahinschwinden des elektrostatischen Zwangszustandes, der seinerseits zugleich immer wieder durch die Energiequelle neu ergänzt wird. Uebersteigt die Zufuhr von elektrostatischer Energie zum Volumenelemente in einem gegebenen Augenblicke den in Wärme umgewandelten Betrag, so haben wir einen mit dem Leitungsstrom gleich gerichteten Verschiebungsstrom und entgegengesetzt im andern Falle. Bezeichnen wir die Summe des Leitungs- und des Verschiebungsstromes als den „wahren" Strom, so steht dieser zur Energiezufuhr zum Volumenelemente in derselben Beziehung wie der Leitungsstrom zu der dort verwüsteten Energie. (In Anlehnung an den englischen Sprachgebrauch sei unter „Verwüstung" der Energie deren Umwandlung in Wärme verstanden.)

Allerdings kennt auch die Fernwirkungslehre solche Verschiebungsströme, aber nur in Dielektricis, deren Dielektricitätsconstante grösser ist als 1, d. h. als die der Luft oder des Aethers. Durch die elektrostatische Kraft entsteht auch nach dieser Theorie z. B. in Glas eine Polarisation, deren Entstehen oder Verschwinden einen elektrischen Strom bedeutet. Denkt man sich einen Körper von kleinen leitenden Partikelchen durchsetzt, während die isolirende Hülle, in die diese eingebettet sind, dieselben elektrischen Eigenschaften besitzt, wie das Vacuum oder wie die Luft, so hat man ein System, das sich nach der Fernwirkungslehre vollkommen in seinem Verhalten mit dem des Dielektricums deckt. Die durch die Polarisation veranlassten Ströme sind hier sogar wirkliche Leitungsströme; elektrisch sind alle Nichtleiter an sich gleichwerthig und die Dielektricitätsconstante wird nur durch die verborgenen leitenden Theilchen sozusagen scheinbar über das normale Maass erhöht.

Sobald es sich aber um Verschiebungströme im Vacuum oder in den Leitern selbst handelt, steht die Fernwirkungstheorie der Maxwell'schen diametral entgegen. Nur die Maxwell'sche Theorie konnte daher dazu führen, das Licht als eine elektromagnetische Wellenerscheinung zu erklären.

Es fragt sich nun aber, wie und in welchen Einheiten die Verschiebungsströme auszumessen sind, damit sie unmittelbar mit den Leitungsströmen vergleichbar werden. Dazu ist es nur nöthig, den vorher in Worten durchgeführten Vergleich beider Stromarten zahlenmässig zu verfolgen. Für die Volumeneinheit ist die elektrostatische Energie T nach § 38 gleich

$$T = \frac{K}{8\pi} \mathfrak{E}^2$$

zu setzen. Ein Verschiebungsstrom in der Richtung von $\mathfrak{E}$ vermehrt T im Zeitelemente dt daher um

$$dT = \frac{K}{4\pi} \mathfrak{E} \cdot \dot{\mathfrak{E}} \cdot dt,$$

wobei $\dot{\mathfrak{E}}$ für $d\mathfrak{E}/dt$ gesetzt ist. — Andererseits ist die durch einen Leitungsstrom in der Volumen- und der Zeiteinheit verwüstete Energie nach dem Ioule'schen Gesetze (Gleichung 147)

$$Q = \mathfrak{E}\mathfrak{i}.$$

Falls nun bei gegebenem $\mathfrak{E}$ die durch den Verschiebungsstrom bedingte Energiezufuhr ebensogross werden soll, wie die vom Leitungsstrome in der gleichen Zeit verwüstete

Energie, so muss, wie ein Vergleich von dT und Q lehrt $\mathfrak{i} = \frac{K}{4\pi}\dot{\mathfrak{E}}$ sein, d. h. die letztgenannte Grösse ist als das Maass des Verschiebungsstromes, der dadurch zugleich auch der Richtung nach dargestellt wird, zu betrachten.

Gebrauchen wir also für den wahren Strom durch eine gegebene Querschnittsfläche die Buchstaben $\mathfrak{C}$ bezw. C und für den specifischen Strom an einer Stelle des Feldes $\mathfrak{c}$, so ist

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{K}{4\pi}\dot{\mathfrak{E}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

An Stelle des zweiten Gliedes der rechten Seite kann man übrigens nach Gleichung 115, S. 91 einfacher $\dot{\mathfrak{D}}$ schreiben, so dass auch

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \dot{\mathfrak{D}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

ist. Der Verschiebungsstrom ist daher in der That, auch der Grösse nach, nichts anderes als die Aenderung der Verschiebung, bezogen auf die Zeiteinheit.

§ 65. Erweiterte Form der ersten Hauptgleichung.

Die Gleichungen (143) und (150) sind nur unter der Bedingung gültig, dass keine anderen als Leitungsströme im Felde vorkommen. Wir können sie aber jetzt leicht auch auf den Fall übertragen, dass daneben auch Verschiebungsströme bestehen, indem wir in ihnen $\mathfrak{i}$ durch $\mathfrak{c}$ ersetzen. Denn da nach der Maxwell'schen Theorie Verschiebungs- und Leitungsströme als wesentlich gleichartige Vorgänge (wenigstens insofern, als es sich um die Energiezufuhr aus dem äusseren Raume zu dem betreffenden Volumenelemente handelt) anzusehen sind, muss auch das ihnen im äusseren Raume entsprechende magnetische Feld in gleicher Weise in Beziehung zu ihnen stehen.

Aus Gleichung (143) erhalten wir daher jetzt

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

und bei Einsetzen der Werthe von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{i}$ aus Gleichung (151) und Gleichung (145)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi k \mathfrak{E} + K \dot{\mathfrak{E}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

oder, wie man dafür auch in leichtverständlicher Abkürzung schreiben kann

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \left(4\pi k + K \frac{d}{dt}\right) \mathfrak{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154^a)$$

Der Klammerwerth kann als der (von dem Feldzustande unabhängige) Operator bezeichnet werden, der uns aus $\mathfrak{E}$ den curl von $\mathfrak{H}$ kennen lehrt.

§ 66. Convectionsströme.

Ein elektrisch geladener, isolirter Körper bewege sich etwa im Luftraume oder in einem mit Petroleum gefüllten Gefässe u. s. w. Irgendwo in dem Medium sei eine geschlossene Fläche construirt. So lange sich der Körper ausserhalb der Fläche befindet, ist der gesammte von ihm ausgehende Verschiebungsfluss durch diese Fläche gleich Null (vgl. § 40). Sobald er in die Fläche eingetreten ist, wird der Verschiebungsfluss, also das Oberflächenintegral der Verschiebung für die Fläche gleich der wahren Elektricitätsmenge, die mit dem Körper in den Raum übergetreten ist. Die Aenderung des Verschiebungsflusses bedeutet aber einen durch die Fläche tretenden Verschiebungsstrom.

Nun gehört es, wie schon in der Einleitung festgestellt wurde, zu den wichtigsten Annahmen der Maxwell'schen Theorie, dass die elektrischen Ströme — falls man alle ihre Bestandtheile sorgfältig in Rechnung zieht — stets geschlossen sind, oder dass sich das hypothetische Fluidum, das man sich im Strömen begriffen denken kann, wie eine incompressible Flüssigkeit bewegt. Wenn also, wie in unserem Falle, ein Strom — nämlich der Verschiebungsstrom — aus der geschlossenen Fläche ausgetreten ist, muss nothwendig auch ein Strom durch dieselbe Fläche in den inneren Raume eingetreten sein. Dieser kann aber nur durch den Uebergang der Ladung des Körpers mit wahrer Elektricität in den Innenraum dargestellt werden.

Wir werden so zu dem Schlusse geführt, dass jede Bewegung wahrer Elektricitätsmengen durch den Raum einen elektrischen Strom — den Convectionsstrom — darstellt, mit allen Eigenschaften, die den Strömen im Allgemeinen zukommen.

Abgesehen von dieser Beweisführung wird der Schluss auch von der Erfahrung bestätigt. So kann man einen Leitungsstrom in einem Leiterkreise unterhalten, der an einer Stelle unterbrochen ist, indem man in die Lücke einen Convectionsstrom einschaltet (elektrisches Glockenspiel). Nach den Versuchen von Rowland übt ein Convectionsstrom magnetische Wirkungen aus, u. s. w.

Aus unserer Betrachtung ergibt sich auch das Maass des Convectionsstromes. Wenn die wahre Elektricitätsmenge e_w in den Raum übergetreten ist, bildet e_w zugleich das Maass für das Zeitintegral des im Ganzen aus der Fläche ausgetretenen Verschiebungsstromes. Der Strom selbst ist daher in einem gegebenen Augenblicke gleich de_w/dt. Bezeichnen wir, wie früher, mit ϱ_w die räumliche Dichte von e_w und mit $\mathfrak{u}$ die Geschwindigkeit, mit der sich der geladene Körper an der betreffenden Stelle bewegt, so gibt $\varrho_w \mathfrak{u}$ den specifischen Convectionsstrom an, denn bei Multiplication mit der zu $\mathfrak{u}$ senkrechten Querschnittsfläche df und mit dem Zeitelemente dt erhält man in der That als Tensor die Elektricitätsmenge de_w, die während dessen an der betrachteten Stelle durch die Fläche df hindurchgeführt wurde. Bezeichnen wir die Dichte des Convectionstromes daher mit $\mathfrak{k}$, so erhalten wir

$$\mathfrak{k} = \varrho_w \cdot \mathfrak{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

Dieses Glied ist überall, wo Bewegungen wahrer Elektricitätsmengen vorkommen, dem wahren Strome hinzuzufügen.

Aus Gleichung (152) wird daher

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \dot{\mathfrak{D}} + \varrho_w \mathfrak{u} = \mathfrak{i} + \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{D} \quad . \quad . \quad (156)$$

Die erste Hauptgleichung nimmt damit die neue, allgemeinere Form an

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathfrak{H} &= 4\pi\mathfrak{i} + 4\pi\dot{\mathfrak{D}} + 4\pi\mathfrak{u}\operatorname{div}\mathfrak{D}\\ &= 4\pi k\mathfrak{E} + K\dot{\mathfrak{E}} + K\operatorname{div}\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{u} + (\mathfrak{E}\cdot\nabla K)\mathfrak{u}\end{aligned}\right\} \quad (157)$$

§ 67. Der magnetische Strom.

Von den drei Arten elektrischer Ströme, die ich in dem Vorhergehenden behandelte, hat nur einer, der Verschiebungsstrom, ein Analogon auf der magnetischen Seite. Magnetische Leitungsströme sind bisher niemals beobachtet worden und wahrscheinlich aus einem uns bisher verborgen gebliebenen Grunde, der mit dem Mechanismus dieser Vorgänge zusammenhängt, an sich unmöglich.

Ein magnetischer Leitungsstrom wäre dann vorhanden, wenn der magnetische Zwangszustand allmählich unter Verwüstung der Energie dahinschwände, so dass, um ihn dauernd zu erhalten, dem betreffenden Körper unausgesetzt Energie zugeführt werden müsste. Manche Vorgänge können bei oberflächlicher Betrachtung den Anschein erwecken, als wenn dieser Fall in der That bei den in der Technik verwendeten Magneten zuträfe. So wird bei dem Magnetsysteme einer Dynamomaschine thatsächlich dauernd Energie aufgewendet, um den magnetischen Inductionsfluss aufrecht zu erhalten. Das geschieht aber nicht deshalb, weil der Zwangszustand im Zerfall begriffen wäre, sondern weil er das elastische Bestreben zur Rückbildung hat und weil solche Bedingungen geschaffen werden müssen, die dies verhindern. Es ist so, als wenn man ein Gewicht frei schwebend erhalten will. Man braucht dazu keine Arbeit aufzuwenden und erspart sich jede Anstrengung, wenn man es in geeigneter Weise aufhängt (wie dies der Verwendung permanenter Magnete entspricht). Geht dies nicht an, so verursacht das Halten zwar eine Anstrengung, also auch einen Energieverbrauch in unserem Muskelsystem, auf das getragene Gewicht geht aber nichts von dieser Energie über.

Noch näher liegt die Versuchung, einen magnetischen Leitungsstrom anzunehmen bei dem Kern eines Transformators oder überhaupt bei alternirenden Magneten. Denn bei diesen muss nicht nur Energie zugeführt werden, um den magnetischen Zustand in der gewünschten Weise pulsiren zu lassen, sondern diese Energie wird, wenigstens zum Theil, auch wirklich dem Körpervolumen zugeführt, um dessen Zustandsänderung es sich handelt und dort verwüstet. Selbst wenn man die Foucault'schen Ströme, von denen es klar ist, dass sie nur in secundärer, von dem Hauptvorgange ganz unabhängiger Weise Energie verzehren, durch passende Untertheilung des Eisens vermeidet, bleibt noch eine aufs Engste von dem magnetischen Cykel abhängige Energieverwüstung übrig, die mit der Hysteresis zusammenhängt.

Aber auch die durch Hysteresis verursachte Wärmeentwicklung darf nicht mit jener verglichen werden, die einen magnetischen Leitungsstrom anzeigen würde. Abgesehen von allem anderen, besteht hier der grundsätzliche Unterschied, dass die Wärmeentwicklung durch Hysteresis eine Aenderung der Induction zur Bedingung macht und von dem Maasse dieser Aenderung abhängt, während ein magnetischer Leitungsstrom Energie ebenso bei constanter Induction verwüstete und von der Aenderung überhaupt nicht direct beeinflusst würde.

Man muss daher annehmen, dass es in der Natur keine magnetischen Leiter gibt; dies führt dann von selbst weiter zu dem Schlusse, dass kein wahrer Magnetismus zu Stande kommen kann. Dass von Anfang an solcher schon vorhanden gewesen sei, wird nicht angenommen. Damit fallen auch die magnetischen Convectionsströme im eigentlichen Sinne, wenn man auch von fingirten magnetischen Convectionsströmen in demselben Sinne, wie im zweiten Capitel dieses Abschnitts von fingirten magnetischen Massen reden kann, die auf der Oberfläche oder im Innern der Magnete zur Erklärung der äusseren Wirkung angenommen wurden.

Die Erfahrungen sind vielleicht bisher nicht ausgedehnt und vielseitig genug, um die geschilderte Auffassung in allen Theilen sicher zu bestätigen. Jedenfalls bildet aber die Annahme eine der Hauptgrundlagen der neueren Maxwell'schen Theorie, dass magnetische Leiter und wahre magnetische Massen in der Natur überhaupt nicht vorkommen. Die ganze Fassung der Theorie würde sich bis in das innerste Gefüge hinein ändern müssen, wenn der Nachweis eines magnetischen Leiters gelingen sollte.

Dem elektrischen Verschiebungsstrome steht aber der magnetische Inductionsstrom (oder der magnetische Strom kurzweg, da ein solcher anderer Art nicht vorhanden ist), durchaus vollwerthig gegenüber und er bringt auch, wie aus der Erfahrung bekannt ist, genau analoge Wirkungen hervor.

Für den Verschiebungsstrom fanden wir früher den Werth $\dot{\mathfrak{D}}$; für den magnetischen Strom haben wir daher analog den Werth $\dot{\mathfrak{B}}$ zu wählen. Bezeichnet also $\mathfrak{g}$ die Intensität des magnetischen Stromes an einer bestimmten Stelle des Raumes, so ist $\mathfrak{g}$ definirt durch

$$\mathfrak{g} = \dot{\mathfrak{B}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (158)$$

Für den magnetischen Strom G durch eine bestimmte Querschnittsfläche setze ich ähnlich wie in Gleichung (142) S. 149

$$G = \int \mathfrak{g} \mathfrak{N} \, df = \int \dot{\mathfrak{B}} \mathfrak{N} \, df \quad \ldots\ldots \quad (159)$$

Denkt man sich so, wie es früher auseinandergesetzt war, die Vertheilung des Vectors $\mathfrak{B}$ durch ein System von Inductionslinien dargestellt, so bedeutet $\int \mathfrak{B} \mathfrak{N} \, df$ die Zahl der durch die betreffende Querschnittsfläche gehenden Inductionslinien und G gibt daher die Aenderung dieser Zahl, bezogen auf die Zeiteinheit, an.

Nebenbei bemerkt, wird gerade bei den Betrachtungen, die wir jetzt im Auge haben, das Wort Inductionslinie häufig durch „magnetische Kraftlinie" ersetzt. Man ist dazu dadurch geführt worden, dass im magnetischen Maasssysteme die Constante μ für die Luft $= 1$ gewählt und damit für den Luftraum $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ gemacht wurde, so dass in der Luft Kraft- und Inductionslinien sich völlig decken. Es ist aber nicht genug vor solchen Ungenauigkeiten in der Ausdrucksweise zu warnen, da sie nur zu leicht zu einer Verwischung der zugehörigen Begriffe führen.

In Worten lässt sich Gleichung (159) schliesslich noch dahin zusammenfassen: *Der magnetische Strom durch ein gegebenes Flächenstück ist gleich der auf die Zeiteinheit bezogenen Aenderung des Inductionsflusses durch das Flächenstück.*

Da der magnetische Strom nur aus dem Inductionsstrome besteht und die Inductionslinien an sich schon stets geschlossene Linien bilden, gilt dies auch von den magnetischen Stromlinien. Gerade wie dies von dem elektrischen Strome von vornherein vorausgesetzt wurde, gilt daher auch von dem magnetischen Strome, dass er überall die solenoidale Bedingung erfüllt, d. h. dass stets

$$\operatorname{div} \mathfrak{g} = 0 \qquad \text{(160)}$$

ist.

§ 68. Das Inductionsgesetz.

So wie der elektrische Strom mit einem magnetischen Felde, steht der magnetische Strom mit einem elektrischen Felde in nothwendigem Zusammenhange. Der ersten Hauptgleichung ist daher eine zweite zur Seite zu stellen, die das Differentialgesetz dieses Zusammenhangs, oder, wie man es auch ausdrückt, das Differentialgesetz der elektrodynamischen Induction ausspricht. Das Wort Induction hat hier, wie bekannt, eine durchaus verschiedene Bedeutung von der magnetischen Induction.

Mit Hülfe des Energieprincips kann man zwar die Inductionsgesetze als Correlate der Gesetze über die elektromagnetischen und elektrodynamischen Kräfte ableiten. Dabei läuft aber in jedem Falle die Voraussetzung mit unter, dass andere mit Energieübertragungen oder Energieanhäufungen verbundene Vorgänge als die in Aussicht genommenen nicht vorkommen. Es scheint mir daher, dass die apriorische Gewissheit der auf diesem Wege gewonnenen Aussage über die Nothwendigkeit des Auftretens von inducirten Kräften nicht überschätzt werden darf. In jedem Falle bedarf vielmehr auch sie der Bestätigung durch die Erfahrung.

Andererseits spricht aber das Faraday'sche Inductionsgesetz eine so sicher und einwurfsfrei festgestellte Erfahrungsthatsache aus, dass der Physiker, der seine erste Aufgabe in der möglichst getreuen und unmittelbaren Erfassung und Darstellung der Naturerscheinungen erblickt, nicht zu zögern braucht, sie ganz unabhängig von jedem weiteren Zusammenhange in sein System aufzunehmen. Gewiss gehört es ebenso auch zu den Aufgaben des Physikers, die nothwendigen Beziehungen der einzelnen Erscheinungsgruppen zu einander aufzudecken. Er vermag dieser aber ebensogut gerecht zu werden, wenn er in unserem Falle nachträglich den Nachweis führt, dass das Energieprincip durch das Zusammenwirken aller mitwirkenden Vorgänge befriedigt wird. Ich werde daher die zweite Hauptgleichung hier unmittelbar aus dem Faraday'schen Inductionsgesetze ableiten.

In einem veränderlichen magnetischen Felde sei ein geschlossener linearer Leiter gegeben. Dieser Leiter bilde die Umfangslinie eines Flächenstücks, das so gelegt ist, dass jede Inductionslinie des Feldes die Fläche nicht mehr als einmal durchschneidet. Nach dem Faraday'schen Inductionsgesetze wird dann in dem Leiter ein elektrischer Strom inducirt, dessen Stärke proportional der Aenderung der Zahl der Inductionslinien durch die Fläche, d. h. proportional dem magnetischen Strome durch die Fläche ist. Ueber die Richtung dieses inducirten Stromes werden nachher weitere Angaben folgen.

Wir erkennen hieraus zunächst, dass der magnetische Strom in nothwendigem Zusammenhange mit dem Auftreten elektrischer Kräfte in seiner Umgebung steht, dass er also von einem elektrischen Felde begleitet wird. Ferner lehrt uns jene Thatsache, dass das Linienintegral der elektrischen

Kraft $\mathfrak{E}$ längs der geschlossenen Curve proportional dem magnetischen Strome durch die Fläche ist. Eine Aenderung der Gestalt der Fläche bringt, so lange wir die Umfangslinie beibehalten, keine Aenderung in dem Betrage des magnetischen Stromes herbei, da der magnetische Strom, wie wir sahen, die solenoidale Bedingung erfüllt (vgl. § 33). Auch der in dem Inductionsgesetze vorkommende Proportionalitätsfactor kann, soweit es sich um seine numerische Grösse handelt, der Erfahrung entnommen werden. Ueber die Dimension, die ihm zukommt, gibt aber das, was aus den vorhergehenden Betrachtungen über die Dimensionen der übrigen Grössen hervorgeht, hinreichenden Aufschluss.

Auf Grund dieser Vorbemerkungen lässt sich das Faraday'sche Inductionsgesetz für unseren Fall durch die Gleichung

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s} = -G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

zum Ausdrucke bringen. Sie ist in allen Stücken analog der Gleichung (141) S. 147, die den experimentell festgestellten Zusammenhang zwischen dem elektrischen Strome und der ihm zugehörigen magnetischen Kraft zum Ausdruck brachte. Es fehlt zunächst nur der Factor 4π, was in der unsymmetrischen Wahl der den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ einerseits und $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ andererseits vermittelnden Coefficienten begründet ist. Für die früher erwähnten rationellen Einheiten Heavisides verschwindet dieser Unterschied. Von fundamentaler Bedeutung ist dagegen die Aenderung des Vorzeichens auf der rechten Seite. Dies wird sich sofort näher zeigen, wenn auf die Betrachtung der Richtungen der vorkommenden Vectoren näher eingegangen wird.

Der Proportionalitätscoefficient, von dem vorher die Rede war, hat in Gleichung (161) den Werth 1 erhalten. Wir betrachten dies als Ausdruck der Erfahrung für den Fall, dass alle Grössen im C.-G.-S.-System ausgesprochen sind. Da, wie sich sofort zeigen wird, Gleichung (161) schon ohne Beifügung eines solchen Factors in Bezug auf die Dimensionen homogen ist, hat er die Dimension Null und ist daher in jedem Maasssystem gleich der Einheit, wenn es in einem zutrifft. Der vermuthete Proportionalitätsfactor ist daher, wie es in Gleichung (161) schon geschehen ist, ganz zu unterdrücken. Selbstverständlich müssen indessen alle Grössen in Gleichung (161) auf dasselbe Maasssystem bezogen werden, wenn dies zutreffen soll. Im sog. praktischen Maasssysteme tritt der Factor 10^{-8} in die Gleichung des Inductionsgesetzes, wie sie gewöhnlich angeschrieben wird nur deshalb ein, weil diese unerlässliche Forderung nicht erfüllt ist.

Nach § 49 hat nämlich $\mathfrak{E}$ die Dimensionen

$$\mathfrak{E} = \left(M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} K^{-\frac{1}{2}}\right)$$

und nach § 57 sind die von $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{B} = \left(\mu^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}\right).$$

Zwischen den unbekannten Dimensionen von μ und K besteht der durch Gleichung (139) S. 146 ausgesprochene Zusammenhang. Führen wir der Einfachheit wegen μ auf K zurück, so wird

$$\mu = (K^{-1} L^{-2} T^{2})$$

und wenn man dies in $\mathfrak{B}$ einführt

$$\mathfrak{B} = \left(M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} K^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Nach Gleichung (158) ergibt sich damit für die specifische Intensität $\mathfrak{g}$ des magnetischen Stromes

$$\mathfrak{g} = \left(M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1} K^{-\frac{1}{2}}\right)$$

und hieraus weiter für den totalen magnetischen Strom G nach Gleichung (159) (wobei zu beachten ist, dass die Einheitsnormale $\mathfrak{N}$ die Dimension Null hat)

$$G = \left(M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} K^{-\frac{1}{2}}\right).$$

In der That hat also, wie man aus dieser Zusammenstellung erkennt, das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ dieselbe Dimension wie G und die Gleichung (161) ist an sich schon homogen, so dass ein auf der rechten Seite etwa hinzutretender Factor nur eine absolute Zahl sein dürfte, wie es oben angegeben war.

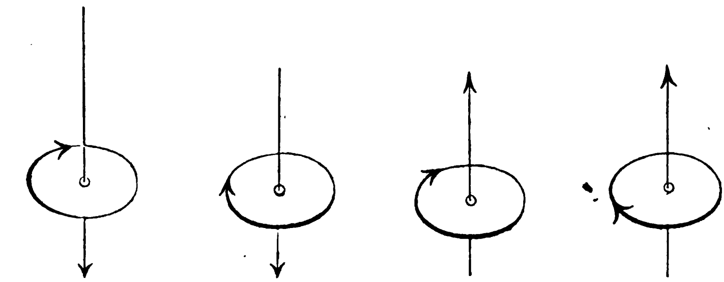
§ 69. Ableitung der zweiten Hauptgleichung.

Hierzu verfolgen wir genau denselben Weg, der schon aus dem Integralgesetze der Gleichung (141) zu der ersten Hauptgleichung geführt hatte. Wie in § 58 finden wir bei Anwendung von Gleichung (161) auf ein unendlich kleines Flächenstück und dessen Umgrenzung, mit Berücksichtigung des Stokes'schen Satzes, wonach $\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s}$ durch $\operatorname{curl} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{N} df$ ersetzt werden kann:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{N} = - \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{N}.$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite wurde hier einfach aus Gleichung (161) übernommen, obschon es in jener Formel noch gar keine Rechtfertigung erfuhr und, wenn Gleichung (161) für sich geblieben wäre, auch ebensogut weggelassen werden konnte. Wir werden aber jetzt erkennen, dass es eingeführt werden musste, wenn in der vorstehenden Gleichung $\mathfrak{N}$ auf beiden Seiten dieselbe Normalenrichtung bedeuten soll.

Zu diesem Zwecke muss eine der Ampère'schen Schwimmerregel analoge Vorzeichenregel über die Richtung der mit einem magnetischen Strome verbundenen elektrischen Kräfte zu Hülfe genommen werden. Am besten eignet sich dazu das Lenz'sche Gesetz, wonach der inducirte elektrische Strom selbst eine magnetische Induction hervorruft, die dem erregenden magnetischen Strome entgegengesetzt gerichtet ist. — Die beste Uebersicht über diese Vorzeichenverhältnisse wird man aus den nachstehenden vier Figuren erhalten, von denen Abbildung 11ª die Ampère'sche Schwimmerregel für einen geradlinigen Strom vor Augen führt. Abbildung 11ᵇ zeigt, was aus der Ampère'schen Regel für die Richtung der von einem elektrischen Kreisstrome ausgeübten magnetischen



Achse: elektr. Strom. Kreis: magn. Kraft. — Abb. 11a.

Kreis: elektr. Strom. Achse: magn. Kraft. — Abb. 11b.

Achse: magn. Strom. Kreis: elektr. Kraft. — Abb. 11c.

Kreis: magn. Strom. Achse: elektr. Kraft — Abb. 11d.

Kraft folgt. Die beiden folgenden Abbildungen 11^c und 11^d stellen den entsprechenden Zusammenhang zwischen dem magnetischen Strome und der elektrischen Kraft dar und zwar ergibt sich die Richtung der beigesetzten Pfeile, um deren Feststellung es sich handelt, für Abbildung 11^c unmittelbar auf Grund des Lenz'schen Gesetzes aus Abbildung 11^b und ebenso geht Abbildung 11^d aus Abbildung 11^a als Folgerung des Lenz'schen Erfahrungsgesetzes hervor.

Die Gedächtnissregeln zur Feststellung der Richtung des unter gegebenen Umständen inducirten Stromes lassen meist viel zu wünschen übrig. Es möge daher hier darauf hingewiesen werden, dass sie durch die einfache Bemerkung ersetzt werden können, dass für den magnetischen Strom und die ihm zugehörige elektrische Kraft die Ampère'sche Schwimmerregel sich genau umkehrt, d. h. dass die von einem magnetischen Strome ausgehende elektrische Kraft entgegengesetzt gerichtet ist wie die von einem elektrischen Strome ausgehende magnetische Kraft. Allerdings lässt sich dies unmittelbar nur auf geschlossene elektrische Stromkreise und nicht auf einzelne Leitertheile, die sich in einem magnetischen Felde bewegen zur Anwendung bringen. Aber auch hier kann man sich immer leicht in der Weise helfen, dass man den bewegten Leitertheil mit beliebig geführten ruhenden Leitern, mit denen der bewegte Theil durch Schleifcontacte verbunden ist, zu einem geschlossenen Stromkreise ergänzt. Man ermittelt dann nach der Ampère'schen Regel unter Berücksichtigung der (nach dem oben Bemerkten) vorzunehmenden Umkehrung die Richtung der in dem geschlossenen Kreise inducirten Kraft und beachtet, dass diese, wenn das Feld selbst unveränderlich ist, nur von dem bewegten Leitertheile herrührt. Nach meiner Erfahrung ist dieser Modus allen bisher vorgeschlagenen Gedächtnissregeln unbedingt vorzuziehen.

Nach dieser Abschweifung kehre ich zur Prüfung der Vorzeichen in unserer Gleichung zurück. Der Fall, auf den sich die Gleichung unmittelbar bezieht, wird durch Abbildung 11[c] dargestellt. Nennen wir wieder, wie früher, $\mathfrak{a}$ einen vom Mittelpunkt der Fläche df nach dem Umfange hingehenden Radiusvector, so ist die auf der linken Seite der Gleichung vorkommende Normale $\mathfrak{N}$ in solcher Richtung zu wählen, dass $\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{a}$, $\mathfrak{N}$ oder auch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{N}$ ein Rechtssystem im Raume bilden, denn diese Normale $\mathfrak{N}$ kam durch die Anwendung des Stokes'schen Satzes in die Gleichung (vgl. § 30). Ein Vergleich mit Abbildung 11[c] zeigt, dass diese Normalenrichtung der des magnetischen Stromes $\mathfrak{g}$ entgegengesetzt ist. Behalten wir diese Bedeutung von $\mathfrak{N}$ bei, so erhält die linke Seite der Gleichung jedenfalls, wie aus den Entwickelungen in § 30 hervorgeht, einen positiven Werth. Das scalare Product $\mathfrak{g}\mathfrak{N}$ andererseits würde einen positiven Werth annehmen, wenn man für $\mathfrak{N}$ die mit dem magnetischen Strome gleichgerichtete Normale setzte. Soll also auf beiden Seiten der Gleichung $\mathfrak{N}$ dieselbe Bedeutung besitzen (und zwar gleichgültig, welche von beiden), so muss auf der einen Seite $\mathfrak{N}$ durch $-\mathfrak{N}$ ersetzt werden. Auf diese Weise kommt in der That das Minuszeichen in die Gleichung.

Beachten wir nun ferner noch, dass die Gleichung für jede Normalenrichtung, also für jede beliebige Stellung des Flächenstücks gültig bleibt, so können wir, wie in § 60, schliessen, dass die Gleichung auch noch richtig bleibt, wenn wir den Factor $\mathfrak{R}$ auf beiden Seiten streichen. Damit erhalten wir die zweite Hauptgleichung

$$\text{curl}\,\mathfrak{E} = -\mathfrak{g} \quad \ldots\ldots \quad (162)$$

Ersetzen wir hierin $\mathfrak{g}$ nach Gl. 158 durch $\dot{\mathfrak{B}}$, so erhalten wir auch

$$\text{curl}\,\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}} = -\mu\dot{\mathfrak{H}} \quad \ldots\ldots \quad (163)$$

Die Symmetrie der Formeln beim Vergleiche der beiden Hauptgleichungen wird dadurch etwas gestört, dass in Gleichung (153) der Factor 4π vorkommt, der in Gleichung (162) fehlt. Dies liegt aber nur an der wenig glücklichen Wahl der heute eingeführten Maasseinheiten, wie schon aus den Bemerkungen nach Gleichung (161) hervorgeht.

§ 70. Zusammenstellung der Dimensionen der in diesem Abschnitte eingeführten Grössen.

Bei allen unseren Formeln ist auf den Einfluss des Mediums gebührend Rücksicht genommen, d. h. es ist nirgends μ oder K vernachlässigt worden. Wollte man dies nachträglich noch thun, so würde man dadurch auf das im elektromagnetischen bezw. elektrostatischen Maasssysteme angenommene System der Dimensionen gelangen.

Wir thun dies aber nicht und erheben darum den Anspruch, dass die von uns ermittelten Dimensionen dem wahren physikalischen Character dieser Grössen entsprechen. Allerdings bleibt dabei vorläufig eine unbekannte Dimension in dem Systeme zurück. Man wird die wichtigsten Aufschlüsse davon erwarten dürfen, wenn es einst gelingt, diese festzustellen, und damit alle Dimensionen fehlerfrei (und nicht willkürlich, wie in den alten Systemen) auf die drei Grundeinheiten zurückzuführen.

Man kann geradezu sagen, dass die Ermittelung dieser einen, uns noch unbekannten Dimension mit der anderen Aufgabe zusammenfällt, das Wesen der elektrischen Er-

Tafel der Dimensionen.

	Ausgedrückt in K	Ausgedrückt in μ	Zurückgeführt auf die 3 Grundeinheiten.
Dielektricitätsconstante K	K	$\mu^{-1}L^{-2}T^{2}$	
Permeabilität μ	$K^{-1}L^{-2}T^{2}$	μ	
Elektrische Kraft $\mathfrak{E}$	$K^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$	$\mu^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-2}$	
Dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$	$K^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$	$\mu^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}}$	
Magnetische Kraft $\mathfrak{H}$	$K^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-2}$	$\mu^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$	
Magnetische Induction $\mathfrak{B}$	$K^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}}$	$\mu^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1}$	
Wahre Elektricitätsmenge e_w	$K^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$	$\mu^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$	
Raumdichte derselben ϱ_w	$K^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}}T^{-1}$	$\mu^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{5}{2}}$	
Freie Elektricitätsmenge e_f	$K^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$	$\mu^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{5}{2}}T^{-2}$	
Raumdichte derselben ϱ_f	$K^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{3}{2}}T^{-1}$	$\mu^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-2}$	
Wahrer Magnetismus (hypothetisch)	$K^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$	$\mu^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}$	

Raumdichte desselben σ_w	$K^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{5}{2}}$	$\mu^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Freier Magnetismus	$K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-2}$	$\mu^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$
Raumdichte desselben σ_f	$K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$	$\mu^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Elektromotorische Kraft $E = \int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s}$ und Potential der freien Elektricität V	$K^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$\mu^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Linienintegral der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ (magnetomotorische Kraft) oder Potential des freien Magnetismus	$K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$	$\mu^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Elektrischer Strom $\mathfrak{J}$	$K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$	$\mu^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$
Stromdichte $\mathfrak{i}$	$K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$	$\mu^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$
Magnetischer Strom G	$K^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	$\mu^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$
Stromdichte $\mathfrak{g}$	$K^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} T^{-1}$	$\mu^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-2}$
Elektrischer Leitungswiderstand R	$K^{-1} L^{-1} T$	$\mu L T^{-1}$
Specifischer Widerstand $1/k$	$K^{-1} T$	$\mu L^2 T^{-1}$
Specifische Leitungsfähigkeit k	$K T^{-1}$	$\mu^{-1} L^{-2} T$
Elektrostatische Capacität C	$K L$	$\mu^{-1} L^{-1} T^2$

scheinungen zu ergründen. Beide Fragen werden zu gleicher Zeit ihre Beantwortung finden. Die Aufstellung der Dimensionen bildet daher eine Angelegenheit von nicht zu unterschätzender Wichtigkeit. Es wird sich daher rechtfertigen, wenn ich hier nochmals alle bisher in diesem Abschnitte aufgestellten Dimensionen zusammenstelle und daran die bisher noch nicht aufgeführten anschliesse.

Für jede Dimension werde ich der bequemeren Uebersicht und Vergleichbarkeit wegen, zwei Ausdrücke geben, indem ich einmal K und das andere Mal μ als die eine Grösse ansehe, über deren Dimension sich bisher nichts entscheiden liess.

Die dritte Spalte harrt noch ihrer Ausfüllung. Ich habe sie herstellen lassen, obschon ich sie nicht auszufüllen vermag, theils um dem Leser Gelegenheit zu geben, dies nachträglich zu thun, sobald die Frage entschieden ist (oder auch hypothetisch nach den Conjecturen, die sich gerade über diesen Punkt so leicht anstellen lassen), namentlich aber um einstweilen den Leser stets, wenn er die Tafel zu Rathe zieht, daran zu erinnern, dass uns die wahre Abhängigkeit aller dieser Grössen von jeder der drei Grundeinheiten vorläufig noch unbekannt ist.

Dritter Abschnitt.

Weiterer Ausbau des Systems.

Erstes Capitel.

Die elektrodynamischen und die magnetodynamischen Kräfte.

§ 71. Ponderomotorische Kraft an einem Stromelemente.

Wie im vorigen Abschnitte knüpfe ich auch in diesem wieder unmittelbar an die Erfahrung an. Dass die Erfahrung nothwendig zu den von ihr gelieferten Ergebnissen führen musste, wenn das Gesetz von der Erhaltung der Energie im Zusammenhange mit den früher festgestellten Beziehungen befriedigt werden sollte, wird sich dann nachträglich zeigen. — Es ist gewiss besser, die Zahl der Ausgangspunkte bei der Darstellung einer Theorie möglichst zu beschränken, wenn diese Ausgangspunkte hypothetischer Natur sind und durch jeden ein neues Element der Ungewissheit in das System hineingetragen wird. Das trifft aber hier keineswegs zu, wo nur ein mit aller Sicherheit festgestelltes Naturgesetz in Frage kommt. Ein Tadel über die von mir gewählte Behandlung kann sich daher höchstens gegen die Eleganz der Form richten und kann nicht zu einem Zweifel an der thatsächlichen Berechtigung der gewählten Grundlagen führen. Man bedenke aber dabei, dass ich mir die möglichst elementare und leichtverständliche Behandlung des Gegenstandes zur obersten Richtschnur machte, wenn ich dabei auch durchaus nicht gesonnen war, ihr die strenge Durchführung des ganzen Systems in irgend einem Punkte zum Opfer zu bringen. Das ganze

Lehrgebäude kann aber nur an Klarheit und Durchsichtigkeit und zugleich wohl auch an Zuverlässigkeit gewinnen, wenn es sich überall möglichst unmittelbar auf die eigentlichen Erfahrungsthatsachen, mit denen Jedermann wohl vertraut ist, stützt.

Das Ampère'sche Gesetz über die ponderomotorische Kraft zwischen zwei Stromelementen, das der Darstellung der Elektrodynamik sonst gewöhnlich zu Grunde gelegt wird, dürfte ich freilich nicht zu einem solchen neuen Ausgangspunkte wählen. Denn dieses sogenannte Gesetz ist keineswegs der unmittelbare Ausdruck einer wirklichen Erfahrung, es ist nur eine auf hypothetischem Wege gewonnene Abstraction aus einer solchen. Die ponderomotorische Kraft zwischen zwei Stromelementen oder überhaupt zwischen zwei Stromtheilen ist der Beobachtung gar nicht zugänglich, da, wenigstens im Sinne der Maxwell'schen Theorie, ungeschlossene Ströme überhaupt nicht vorkommen. Schon der Umstand, dass das Grassmann'sche Gesetz der Fernwirkung zwischen Stromelementen die wirklich beobachteten Erscheinungen ebensogut zu erklären vermochte, wie die Ampère'sche Hypothese, zeigt dies deutlich genug. — Aber auch selbst wenn diese Unsicherheit nicht hinzukäme, wäre das Ampère'sche Gesetz ein durchaus ungeeigneter Ausgangspunkt für die Darstellung der Maxwell'schen Theorie, da es sich nur auf die letzte Aeusserung und nicht auf die Art des Zustandekommens der ponderomotorischen Kraft durch die Vermittelung des Mediums bezieht.

Ganz anders ist es mit der ponderomotorischen Kraft, die an einem Stromelemente wirkt, wenn sich dieses in einem magnetischen Felde befindet, das auf beliebige Art zu Stande gekommen sein kann. Deren Grösse und Richtung wird in der That unmittelbar durch den Versuch bekannt. Zwar muss auch hier das Stromelement nothwendig zu einem geschlossenen Stromkreise gehören, wir können es aber mechanisch von dessen Rest so isoliren, dass die an ihm angreifende ponderomotorische Kraft der Messung unmittelbar zugänglich wird. Dazu ist nur nöthig, den betreffenden Stromtheil mit dem Reste des Stromkreises durch Gleitstellen zu verbinden: elektrisch hängen dann beide zusammen, mechanisch sind sie aber völlig getrennt. Verwirklicht wird diese Anordnung in dem bekannten Ampère'schen Fundamentalversuch.

Das Ergebniss der auf diesem Wege gewonnenen Erfahrung lässt sich ohne jede Hypothese wie folgt zusammenfassen. Steht zunächst die Richtung des Stromelementes $d\mathfrak{s}$ senkrecht zur Richtung des Feldes $\mathfrak{B}$, so greift an ihm eine Kraft $\mathfrak{F}$ an, rechtwinklig zu $d\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{B}$ und zwar so, dass die Aufeinanderfolge $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$ ein Rechtssystem im Raume bildet, deren Tensor F ferner gleich $IdsB$ ist, wenn mit I die Stromintensität bezeichnet wird. Vorausgesetzt wird dabei, dass $d\mathfrak{s}$ in demselben Sinne wie die Stromrichtung gezählt wird. Wenn $\mathfrak{B}$ zu $d\mathfrak{s}$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, wird $\mathfrak{F}$ zu Null. Bei beliebiger Richtung von $\mathfrak{B}$ und $d\mathfrak{s}$ ist der Vector $\mathfrak{B}$ in zwei Componenten zu zerlegen, von denen eine in die Richtung von $d\mathfrak{s}$ fällt und nichts zu $\mathfrak{F}$ beiträgt, während die andere zu $d\mathfrak{s}$ senkrechte Componente eine sich nach der vorhergehenden Regel bestimmende Kraft $\mathfrak{F}$ hervorbringt. Alle diese Aussagen werden durch die folgende vereinigt wiedergegeben:

$$\mathfrak{F} = I \cdot V d\mathfrak{s}\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (164)$$

Aus dem Begriffe des Vectorproducts (§ 7 S. 15) geht nämlich sofort hervor, dass die Gleichung das verlangte Resultat liefert, wenn $\mathfrak{B}$ rechtwinklig zu $d\mathfrak{s}$ steht. Ebenso wird, wenn $\mathfrak{B}$ und $d\mathfrak{s}$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, ihr Vectorproduct zu Null. Bildet schliesslich $\mathfrak{B}$ irgend eine Winkel mit $d\mathfrak{s}$, so geht das Vectorproduct bei der oben für $\mathfrak{B}$ angewendeten Zerlegung in $V d\mathfrak{s}\mathfrak{B}' + V d\mathfrak{s}\mathfrak{B}''$ über, wovon das erste Glied, falls $\mathfrak{B}'$ die mit $d\mathfrak{s}$ gleichgerichtete Componente bedeutet, verschwindet. In jedem Falle wird daher die Kraft $\mathfrak{F}$ nach Grösse und Richtung durch Gleichung (164) in Uebereinstimmung mit der Erfahrung angegeben.

Man könnte nur insofern im Zweifel sein, ob $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{H}$ zur Messung der Intensität des magnetischen Feldes zu verwenden sei. Denn die Erfahrungen, um die es sich hier handelt, sind, wenigstens der überwiegenden Mehrzahl nach, durch Beobachtungen im Luftraume gewonnen und in diesem ist unter Zugrundelegung des gewöhnlich gebrauchten elektromagnetischen Maasssystems $\mathfrak{H}$ von gleicher Grösse mit $\mathfrak{B}$. Das gilt aber nur für dieses willkürliche Maasssystem, während Gleichung (164) ein von jeder derartigen Wahl unabhängiges Naturgesetz ausspricht. Man kann also leicht entscheiden, ob $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{H}$ in Gleichung (164) einzuführen ist, indem man prüft, ob sie in dem einen oder anderen Falle homogen in Bezug auf die Dimensionen ist. Setzt man die in § 70 zusammengestellten Dimensionen in Gleichung (164) ein, so erkennt man sofort, dass sie in dieser Form in der That homogen ist, während dies nicht zuträfe, wenn man $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{H}$ ersetzen wollte.

Zugleich folgt aus dieser Betrachtung weiter, dass Gleichung (164) für jedes Medium gilt, welches auch die ihm zukommenden Werthe von K und μ sein mögen. Im anderen Falle, wenn $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{H}$ ersetzt würde, könnte sie nur für ein bestimmtes Medium und für ein bestimmtes Maasssystem zutreffen.

§ 72. Umformung von Gleichung (164).

Gleichung (164) bezieht sich auf lineare Leiter und stellt, da I bei der Anwendung auf einen bestimmten Fall stets ein Oberflächenintegral über den Leiterquerschnitt bedeutet, kein eigentliches Differentialgesetz dar. Um ein solches aus Gleichung (164) abzuleiten, ist es nur nöthig, diese Gleichung auf ein körperliches Stromelement anzuwenden. In der Richtung der Strömung $\mathfrak{i}$ denke ich mir in dem elektrisch durchströmten Körper einen unendlich kleinen Cylinder von der Länge dl (scalar genommen) und dem Querschnitte df abgegrenzt. Für dieses Stromelement geht $Id\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{i}\,df\,dl$ über und Gleichung (164) liefert

$$\mathfrak{F} = df\,dl\,V\,\mathfrak{i}\mathfrak{B}\,.$$

Das Product $df\,dl$ kann durch das Volumenelement dv ersetzt werden. Sobald dies geschehen ist, bleibt die vorstehende Gleichung aber auch für jedes beliebig abgegrenzte Volumenelement gültig. Denn ein solches lässt sich stets in Elemente höherer Ordnung von der früheren Abgrenzungsart zerlegen und die elektrodynamische Kraft an dem ganzen Elemente ist gleich der Vectorsumme der $\mathfrak{F}$ an allen Theilen. Allgemein ist daher

$$\mathfrak{F} = dv\,\mathrm{V}\,\mathfrak{i}\mathfrak{B}.$$

Wir wollen aber von jetzt ab dem Buchstaben $\mathfrak{F}$ eine andere Bedeutung beilegen, nämlich die auf die Volumeneinheit bezogene ponderomotorische Kraft an der betreffenden Stelle des elektrisch durchströmten Leiters darunter verstehen. Hierbei ist nur zu beachten, dass $\mathfrak{F}$ dann nicht mehr die Dimension MLT^{-2}, sondern $ML^{-2}T^{-2}$ hat und dass die mechanische Kraft aus ihm erst durch Multiplication mit einem Volumen gefunden wird. Man könnte daher $\mathfrak{F}$ in seiner neuen Bedeutung als die specifische elektrodynamische Kraft bezeichnen.

Unter diesen Festsetzungen erhalten wir aus dem Vorhergehenden als das Differentialgesetz der an Leitungsströmen angreifenden elektrodynamischen Kräfte:

$$\mathfrak{F} = \mathrm{V}\,\mathfrak{i}\mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (165)$$

§ 73. Erweiterung des Satzes.

Nach der Maxwell'schen Theorie stellt $\mathfrak{i}$ nicht die wahre elektrische Strömung, sondern nur einen Theil davon dar. Um den wahren Strom zu erhalten, müssen wir noch den Verschiebungsstrom $\dot{\mathfrak{D}}$ und den Convectionsstrom $\varrho_w \cdot \mathfrak{u}$ mit einrechnen. Es ist eine der fundamentalen Hypothesen der ganzen Theorie, dass die beiden anderen Theile in jeder Hinsicht mit $\mathfrak{i}$ gleichwerthige Grössen bilden und dass daher von ihnen überall, wo es sich um ihre Beziehungen zu den elektrischen, magnetischen und elektrodynamischen Feldern handelt, dasselbe wie von $\mathfrak{i}$ gilt. Auch Gleichung (165) bedarf daher einer Erweiterung, sobald neben $\mathfrak{i}$ noch die anderen Bestandtheile des wahren Stromes auftreten. Die erweiterte Gleichung bildet dann allerdings nicht mehr wie Gleichung (165) den Ausdruck einer experimentell festgestellten Thatsache. Sie beruht daneben auf der genannten Hypothese: sie steht und fällt mit dieser, d. h. mit der Maxwell'schen Theorie überhaupt.

Nach der Maxwell'schen Theorie ist demnach Gleichung (165) zu ersetzen durch (vgl. § 66)

$$\mathfrak{F} = \mathrm{V}\mathfrak{c}\mathfrak{B} = \mathrm{V}\mathfrak{i}\mathfrak{B} + \mathrm{V}\dot{\mathfrak{D}}\mathfrak{B} + \operatorname{div}\mathfrak{D}\,\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{B} \quad . \quad (166)$$

wofür auch mit Rücksicht auf die erste Hauptgleichung (Gleichung 153, S. 158) gesetzt werden kann

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{V}\operatorname{curl}\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{B} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (167)$$

Durch Anwendung der in den Gleichungen (85) und (86), S. 64 ausgesprochenen Rechengesetze kann man diese Gleichung noch auf eine der beiden folgenden Formen bringen:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\mathfrak{F} &= (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{H} - \nabla_{\mathfrak{H}}\mathfrak{H}\mathfrak{B} \\ &= \operatorname{curl}_{\mathfrak{H}}\mathrm{V}\mathfrak{H}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{H} - \nabla_{\mathfrak{H}}\mathfrak{H}\mathfrak{B} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (168)$$

Diese Gleichung gilt übrigens, wie die erste Hauptgleichung in der ihr im vorigen Abschnitte gegebenen Form nur im Innern magnetisch weicher Körper (vgl. die Schlussbemerkung von § 60). Ferner ist zu beachten, dass in isotropen Körpern zwar $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{H}$ gleichgerichtet und das Vectorproduct aus ihnen daher gleich Null ist, dass aber die Ausführung der partiellen Operation $\operatorname{curl}_{\mathfrak{H}}$ daran trotzdem ein von Null verschiedenes Resultat liefert. Für das scalare Product $\mathfrak{H}\mathfrak{B}$ kann man nach Gleichung (129), S. 123 $8\pi T$ schreiben, wenn unter T die auf die Volumeneinheit bezogene magnetische Energie verstanden wird. Nun ist für isotrope Körper $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$, und überall wo μ constant ist $B_1 \partial H_1/\partial x = H_1 \partial B_1/\partial x$ u. s. f., daher auch $\nabla_{\mathfrak{H}}\mathfrak{H}\mathfrak{B} = \nabla_{\mathfrak{B}}\mathfrak{H}\mathfrak{B}$. Die Summe beider Ausdrücke liefert aber das totale $\nabla\mathfrak{H}\mathfrak{B}$. Beachtet man schliesslich noch, dass div $\mathfrak{B}$ überall Null und für constantes μ daher auch div $\mathfrak{H} = 0$ ist, so folgt aus Gleichung (168) ferner noch

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{F} &= \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{B}\nabla)\,\mathfrak{H} - \nabla T \\ &= \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{curl}_{\mathfrak{H}}\,\mathrm{V}\,\mathfrak{H}\mathfrak{B} - \nabla T \\ &= \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{H}\nabla)\,\mathfrak{B} - \nabla T\end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (169)$$

Diese Gleichungen gelten indessen nur für das Innere magnetisch weicher und isotroper Körper mit constanter Permeabilität.

§ 74. Magnetodynamische Kräfte.

Nach der zwischen den elektrischen und magnetischen Erscheinungen bestehenden Dualität müssen wir erwarten, dass auch an den von magnetischen Strömen durchflossenen Körpern ponderomotorische Kräfte auftreten. Allerdings bestehen die magnetischen Ströme nur aus den Inductionsströmen, also jenen, die den Verschiebungsströmen der elektrischen Seite entsprechen. Gerade für diese war aber das Gesetz der elektrodynamischen Kräfte nicht unmittelbar aus der Erfahrung bekannt, sondern erst auf Grund der Maxwell'schen Hypothese über die Zusammensetzung des wahren Stromes erschlossen. Die jetzt aufzustellenden Gleichungen beruhen daher ebenfalls auf dieser Hypothese und auf dem Principe der Dualität zwischen den beiden Seiten des Elektromagnetismus (man kann dieses der Kürze halber das Heaviside'sche Princip nennen). Einer Prüfung durch die Erfahrung sind die „magnetodynamischen“ Kräfte nicht zugänglich, da ihre aus der Theorie hervorgehende Intensität zu gering ist, um sich bemerklich machen zu können. Doch kann man, wie sich später zeigen wird, die Nothwendigkeit ihres Auftretens ebenso aus dem Energieprincip ableiten wie die der elektrodynamischen Kräfte aus den inducirten elektromotorischen Kräften oder umgekehrt, sobald nur zugegeben wird, dass die elektrischen Verschiebungsströme ein magnetisches Feld hervorbringen, d. h. dass sie Bestandtheile des wahren elektrischen Stromes sind. — Die Fernwirkungslehre kennt natürlich keine magnetodynamischen Kräfte, ebensowenig wie elektrische Verschiebungsströme oder magnetische Ströme.

Nach dieser Umschreibung der Stellung, die dem Gesetze der hypothetischen magnetodynamischen Kräfte in dem ganzen Systeme zukommt, schreibe ich in Anlehnung an Gleichung (165) bezw. (166) die Gleichung an, die es in Form eines Differentialgesetzes zum Ausdrucke bringt. Dabei ist nur zu beachten, dass, wie sich schon früher ergab, die von magnetischen Strömen erzeugten elektrischen Kräfte gerade entgegengesetzt gerichtet sind wie die von elektrischen Strömen herrührenden magnetischen Kräfte (vgl. § 69). Man muss daher auch eine entgegengesetzte Richtung der ponderomotorischen Kräfte erwarten. Mit dieser Directive erhalten wir nach dem Dualitätsprincipe aus Gleichung (166)

$$\mathfrak{F}' = -V\mathfrak{g}\mathfrak{D} = V\mathfrak{D}\mathfrak{g} = V\mathfrak{D}\dot{\mathfrak{B}} \quad . \quad . \quad . \quad (170)$$

Diese Gleichung und namentlich auch das in ihr gewählte Vorzeichen wird späterhin noch eine weitere Rechtfertigung erhalten.

Die magnetodynamische Kraft ist hier zum Unterschiede von der elektrodynamischen mit $\mathfrak{F}'$ bezeichnet. Wenn in einem Körper gleichzeitig magnetische Inductions- und elektrische Verschiebungsströme vorkommen, wie beim Fortschreiten einer elektromagnetischen Störung in einem Dielektricum, haben wir im Ganzen die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{F} + \mathfrak{F}'$ auf die Volumeneinheit bezogen. Aus Gleichung (166) und Gleichung (170) ergibt sich dafür (vgl. Gleichung 28, S. 33)

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}' = V\dot{\mathfrak{D}}\mathfrak{B} + V\mathfrak{D}\dot{\mathfrak{B}} = \frac{d}{dt} V\mathfrak{D}\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad (171)$$

Unter Berücksichtigung der zweiten Hauptgleichung, Gleichung (162), S. 171 kann man für $\mathfrak{F}'$ ferner schreiben

$$\mathfrak{F}' = V\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

woran sich wiederum weitere analytische Umformungen knüpfen lassen, genau wie im vorigen § an Gleichung (167). Es genügt, zu bemerken, dass Gleichung (168) und (169) bei Unterdrückung des Factors 4π die Werthe von $\mathfrak{F}'$ angeben, wenn man darin die magnetischen Grössen durch die entsprechenden elektrischen ersetzt.

Vorher war schon bemerkt, dass $\mathfrak{F}'$ sich wegen seiner Kleinheit nicht beobachten lasse. Ein Zahlenbeispiel möge dies näher begründen. Die elektrische Stärke der Luft kann auf etwa 30 000 Volt für 1 cm gesetzt werden, d. h. wenn das elektrische Potentialgefäll diesen Werth übersteigt, tritt eine disruptive Entladung ein. (Nebenbei bemerkt, ist diese disruptive Entladung im Sinne der Maxwell'schen Theorie zweifellos als ein Leitungsstrom zu bezeichnen). Wir haben daher schon ein sehr hohes elektrostatisches Feld, wenn wir $\mathfrak{E}$ gleich 10 000 Volt für 1 cm, d. h. in elektromagnetischen C.-G.-S. Einheiten gleich 10^{12} setzen. $\mathfrak{D}$ wird dann nach Gleichung (115) gleich $10^{12}\,K/4\pi$. Nun ist aber, wenn wir, wie hier, das elektromagnetische Maasssystem gebrauchen, μ für die Luft gleich 1 gesetzt, und da in der Luft die in Gleichung (140), S. 146 vorkommende Geschwindigkeit v zu etwa $3 \cdot 10^{10}$ ermittelt ist, erhalten wir für K nach Gleichung (140) $K = \frac{1}{9} \cdot 10^{-20}$. Für ein anderes Dielektricum ist K zwar grösser als für Luft; es wird aber nicht leicht den Werth 10^{-20} übersteigen können. Es ist ferner mit Schwierigkeiten verbunden, eine Induction $\mathfrak{B}$ hervorzubringen, die merklich grösser als 10^4 C.-G.-S. Einheiten ist (der grösste auf geringe Ausdehnung hin überhaupt bisher erzielte Werth von $\mathfrak{B}$ beträgt davon das 3 bis 4-fache). Nehmen wir nun an, dass $\mathfrak{B}$ im hundertsten Theile einer Secunde von diesem Werthe bis auf Null abnimmt, so ist $\mathfrak{g} = 10^6$ zu setzen. Führt man diese Werthe in Gleichung (170) ein, so erhält man für $\mathfrak{F}'$ bei günstigster (nämlich rechtwinkliger) Lage zwischen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{D}$ ungefähr den Werth 0,0008 Dynen pro ccm des Mediums. Das macht, wenn das Medium das specifische Gewicht 1 hat, etwas weniger als den Millionsten Theil von dem Gewichte des Körpers aus und diese Kraft wirkt nur den hundertsten, bezw. fünfzigsten Theil einer Secunde auf den Körper ein. Dabei waren alle Bedingungen so gewählt, um einen möglichst grossen Werth der magnetodynamischen Kraft zu erzielen.

Nur ein Mittel würde es geben, die Kraft $\mathfrak{F}'$ noch über den berechneten Werth hinaus erheblich zu steigern, nämlich wenn man eine schnellere Aenderung von $\mathfrak{B}$ wählte. Man brauchte in der That unter den vorher angegebenen Umständen $\mathfrak{B}$ nur 100 Millionen solcher Viertelschwingungen in der Secunde ausführen zu lassen, um zu magnetodynamischen Kräften zu gelangen, die von gleicher Grössenordnung mit dem Gewichte der davon betroffenen Körper wären. Da diese Kräfte aber nur für so kurze Zeit andauern und dann in die entgegengesetzte Richtung verkehrt werden, können sie auch unter diesen Umständen keinen bemerkbaren mechanischen Effect hervorbringen.

Auf die durch elektrische Verschiebungs- und Convectionsströme hervorgerufenen elektrodynamischen Kräfte lässt sich natürlich diese Betrachtung ebenfalls anwenden: auch diese Kräfte fallen so gering aus gegenüber den durch elektrische Leitungsströme hervorgerufenen, dass es sehr schwierig ist, sie durch den Versuch unmittelbar nachzuweisen.

Zweites Capitel.

Die eingeprägten elektrischen und magnetischen Kräfte.

§ 75. Definition der eingeprägten Kräfte.

Schon die Mechanik der wägbaren Materie kennt den Begriff der eingeprägten oder, wie sie hier gewöhnlich genannt wird, der äusseren Kraft. Man versteht darunter eine Kraft, die nicht durch die Bedingungen, denen das betrachtete System an sich unterworfen ist, mit bestimmt wird, sondern die in willkürlicher-Weise mit Hülfe von Mitteln, die in keinem nothwendigen Zusammenhange mit dem Systeme stehen, daran angebracht werden. So stehen in einem aus elastischen Körpern aufgebauten Systeme die darin auftretenden Spannungen oder inneren Kräfte in einem gesetzmässigen Zusammenhange unter sich und unter den elastischen Deformationen und den Beschleunigungen; äussere Kräfte können aber in ganz willkürlicher Weise daran angebracht werden. Geschieht dies, so wirken sie allerdings auf den ganzen Verlauf der inneren Kräfte bestimmend ein, aber nur in dem Sinne, dass dadurch die Bedingungen, denen das System unterworfen ist, eine Aenderung erfahren haben. Die äusseren Kräfte stehen daher den Vorgängen im Systeme in dem Verhältnisse von Ursache und Wirkung gegenüber.

Oft wird freilich auch in dem als Beispiel angeführten Falle eine äussere Kraft nur zu dem Zwecke eingeführt, eine Bedingung anderer Art, der das System unterworfen ist, bei der Behandlung der Aufgabe zu ersetzen. So wird, wenn ein Punkt des Systems genöthigt ist, auf einer gegebenen Fläche zu bleiben, die Aufgabe oft so behandelt, als wenn diese Bedingung beseitigt wäre, dafür aber eine zur Fläche normale äussere Kraft an dem Punkte angenommen, deren Grösse nachträglich so gewählt wird, dass die Bedingung erfüllt wird. Hier fällt die Willkür in der Wahl der äusseren Kraft zuletzt wieder fort, die ganze Behandlung der Aufgabe erfolgt aber doch in der Art, dass die äussere Kraft ohne Rücksicht auf die übrig bleibenden Systembedingungen gewählt werden kann.

Eine solche Behandlung hat sich in vielen Fällen auch in der Elektricitätslehre als vortheilhaft erwiesen. Wir betrachten daher von jetzt ab auch solche Fälle, bei denen aus Veranlassungen, über die wir keine Rechenschaft geben wollen oder geben können, also gewissermaassen von aussen her, elektrische oder magnetische Kräfte in dem Systeme auftreten, die ohne Rücksicht auf die übrigen Systembedingungen beliebig gegeben sein können. Diese Kräfte werden eingeprägte genannt.

Wenn es uns bei der Einführung der eingeprägten Kräfte nur darum zu thun ist, die Aufgaben zu vereinfachen, wenn wir also zwar im Stande wären, die Umstände näher darzulegen, die zum Auftreten der Kräfte führten und führen mussten, und nur der vereinfachten Behandlung wegen davon absehen, eine nähere Rechenschaft darüber abzulegen, ist die Sache offenbar ganz unbedenklich. Misslicher ist es, wenn wir keine Rechenschaft darüber geben können. Die Einführung der eingeprägten Kräfte bildet dann ein Zugeständniss dafür, dass die Theorie in den wahren Zusammenhang dieser Dinge noch nicht einzudringen vermochte. Wir finden uns auf diesem Wege mit experimentell festgestellten Thatsachen, für die wir keine zureichende Erklärung haben, in summarischer Weise ab. Die eingeprägten Kräfte bilden daher in solchen Fällen nur einen Behelf bis auf Weiteres, bis es nämlich dem Fortschritte der Wissenschaft gelingen wird, weitere Aufschlüsse über sie zu geben.

Auch für die äusseren Kräfte an dem vorhin betrachteten Systeme elastischer Körper trifft dies zu. Sind die äusseren Kräfte, z. B. Lasten, die wir in beliebiger Vertheilung aufbringen können, so bildet die Veranlassung für ihr Auftreten die Thatsache der allgemeinen Gravitation der Körper in ihrer Anwendung auf die Schwerkraft. Wir haben ihr Auftreten hiermit auf eine allgemeinere Ursache zurückgeführt, die freilich selbst noch der weiteren Aufhellung harrt.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass das Operiren mit eingeprägten Kräften grosse Vorsicht erheischt. Es bildet aber das einzige Mittel, um beim gegenwärtigen Zustande unseres Wissens die experimentell festgestellten Thatsachen im Rahmen einer Theorie möglichst vollständig wiederzugeben.

§ 76. Auffassung der inducirten elektrischen Kräfte als eingeprägte Kräfte.

Unter allen elektrischen Kräften sind es die in ruhenden Leitern durch Veränderungen des magnetischen Feldes inducirten Kräfte, für die wir die Bedingungen des Auftretens am besten kennen. Bei ihnen liegt daher am wenigsten Veranlassung dazu vor, sie als eingeprägte Kräfte zu behandeln. Freilich ist auch gerade darum diese Behandlung am wenigsten bedenklich, wenn sie nur zur Vereinfachung der Darstellung gewählt wird, denn wir sind in jedem Augenblicke, falls es sich als wünschenswerth herausstellt, im Stande, auf die tiefer liegenden Ursachen zurückzugehen.

Sobald wir die in einem Stromkreise inducirten Kräfte als eingeprägte einführen, können wir den Stromverlauf in diesem Kreise in jedem Augenblicke auf Grund des Ohm'schen Gesetzes in seiner einfachsten Gestalt angeben, indem wir dabei weiterhin nur noch auf die Potentialdifferenzen Rücksicht nehmen, die Aufgabe also so behandeln, als wenn gar keine Induction in Frage käme. An der Stelle, wo die eingeprägten Kräfte auftreten, fingiren wir dabei elektromotorische Kräfte von derselben Art, wie sie in einer galvanischen Batterie auftreten. In dieser Art wird die Aufgabe sogar gewöhnlich behandelt. Daher kommt es, dass die Schriftsteller der elektrotechnischen Litteratur so häufig die elektromotorische Kraft einfach als ein Synonym der Potentialdifferenz ansehen.

In Wirklichkeit wird dabei freilich eine ihren Wirkungsbedingungen nach vergleichsweise sehr gut bekannte elektrische Kraft durch eine andere, nämlich die galvanische Kraft, ersetzt, deren Wesen weit mehr in Dunkel gehüllt ist. Im Allgemeinen empfiehlt es sich desshalb nicht, die inducirten Kräfte als eingeprägte zu behandeln, wenigstens soweit es sich um die in ruhenden Körpern handelt. Dagegen dient es zuweilen zur Vereinfachung der Darstellung, die durch Bewegung von Körpern in magnetischen Feldern inducirten elektrischen Kräfte zu den eingeprägten hinzuzuschlagen.

§ 77. Die elektrische Contactkraft.

Die Erfahrung lehrt, dass ein Zink- und ein Kupferstück (oder überhaupt zwei Leiter verschiedener Art) die in innige

Berührung zu einander gebracht, also etwa an der Berührungsstelle zusammengeschmolzen werden, ein verschiedenes elektrostatisches Potential annehmen. Dabei sind noch die Fälle zu unterscheiden, dass entweder beide Körper metallische Leiter oder dass mindestens einer von ihnen ein Ektrolyt ist. Im letztern Falle wird die Contactkraft speciell als hydroelektrische Kraft bezeichnet. Nach der (besonders von Exner vertretenen) Ansicht mancher Physiker sind zwar beide Fälle als identisch zu betrachten, indem auch bei der Berührung von Metallen eine (durch den Sauerstoff der Luft u. s. f. eingeleitete) chemische Umsetzung die Veranlassung zum Auftreten des elektrischen Spannungsunterschiedes bildete. Sollte diese Ansicht richtig sein, so würde die hier getroffene Unterscheidung hinfällig werden. Es scheint jedoch schwer möglich zu sein, ohne die Annahme einer elektrischen Contactkraft auszukommen, die von chemischen Umsetzungen unabhängig wäre. Wir werden daher hier voraussetzen, dass solche Contactkräfte, die wir mit $\mathfrak{E}_c$ bezeichnen, wirklich auftreten und sie sorgfältig von den hydroelektrischen Kräften $\mathfrak{E}_h$ unterscheiden, die an chemische Umsetzungen gebunden sind. In diesem § soll nur von den Kräften $\mathfrak{E}_c$ die Rede sein.

Ueber das Auftreten der Kräfte $\mathfrak{E}_c$ haben sich bisher zwei verschiedene Anschauungen geltend gemacht, auf die etwas näher eingegangen werden soll. Die eine gipfelt in der v. Helmholz'schen Theorie der Doppelschichten, die andere rührt von O. Heaviside her.

Man setze den Fall, dass die Elektricität — sei es die freie oder die wahre — materielle Existenz habe und dass diese Materie von dem einen Stoffe auf molekulare Abstände hin mehr angezogen werde als von dem anderen. Unter diesen Umständen wird an der Löthstelle eines vorher unelektrisch gedachten Zink-Kupfer-Stabes eine Kraft auftreten, die eine elektrische Strömung nach der einen Seite (nach der des Zinks) hin bewirkt. Den Oberflächen beider Theile des verbundenen Körpers werden dadurch elektrische Ladungen zugeführt, so lange bis Gleichgewicht eingetreten ist. Im

Gleichgewichtsfalle, mit dem wir uns zu beschäftigen haben, ist im Innern beider Metalle $\mathfrak{E}$ sowohl als $\mathfrak{D}$ überall Null. In den äusseren Raum erstreckt sich dagegen ein Kraft- und Verschiebungsfluss und vielleicht geht ein solcher auch an der Löthstelle zwischen den Grenzschichten hindurch.

Anstatt an die Existenz eines elektrischen Fluidums anzuknüpfen, wie es im Zusammenhange mit diesen Betrachtungen üblich ist, braucht man übrigens nur vorauszusetzen, dass an den Uebergangsstellen eingeprägte, also nicht durch irgend eine andere bekannte Ursache, sondern nur durch den Wechsel in der chemischen Natur des Körpers hervorgerufene elektrische Kräfte auftreten. Man ändert dadurch gar nichts an dem ganzen Zusammenhange und kann ebensogut wie vorher alle weiteren Folgerungen der Theorie der Doppelschichten daraus ableiten. Diese eingeprägten Kräfte sind die Contactkräfte $\mathfrak{E}_c$.

Zur besseren Veranschaulichung sei angenommen, dass der Uebergang des einen Metalls in das andere ganz allmählich erfolge, dass er also durch eine der procentischen Zusammensetzung nach continuirlich veränderliche Legirung aus beiden Metallen gebildet werde. Die Contactkräfte sind dann über eine endliche Länge hin vertheilt. Abbildung 12 bringe diese Vertheilung zur Darstellung. Die Abscissenachse gibt die Längsausdehnung des Körpers an; links

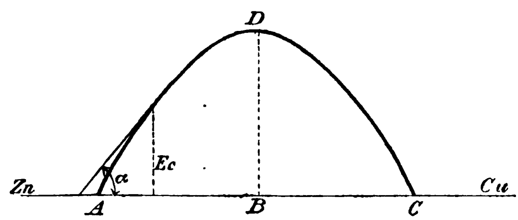


Abb. 12.

von A haben wir reines Zink, rechts von C reines Kupfer und in der Mitte ein nach rechts hin immer zinkarmer und kupferreicher werdendes Messing. Die Ordinate zeigt die Grösse der Contactkraft $\mathfrak{E}_c$ an der betreffenden Stelle an. Die Richtung von $\mathfrak{E}_c$ fällt natürlich in Wirklichkeit mit der Richtung der Abscissenachse zusammen. Auf den Maassstab und die absolute Grösse der Kräfte kommt es jetzt nicht an; die durch die

Abbildung willkürlich angegebene Art der Vertheilung der Kräfte $\mathfrak{E}_c$ oder irgend eine ähnliche wird aber jedenfalls durch entsprechende Wahl der Art des Uebergangs zwischen beiden Metallen (also die Aenderungsgeschwindigkeit in der Zusammensetzung der Legirung) herbeigeführt werden können.

Bezeichnen wir die elektrostatische Kraft mit $\mathfrak{E}_s$ und nehmen wir an, dass neben $\mathfrak{E}_s$ und $\mathfrak{E}_c$ keine elektrischen Kräfte anderen Ursprungs vorkommen, so ist die gesammte elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ zu setzen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

Hier ist nun die Frage aufzuwerfen, ob die elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ durch das ganze $\mathfrak{E}$ oder nur durch den Bestandtheil $\mathfrak{E}_s$ bedingt sein wird. Wenn man bedenkt, dass $\mathfrak{E}_c$ anfänglich allein bestand, dass es dann zu elektrischen Strömungen, die nothwendig durch Verschiebungen $\mathfrak{D}$ eingeleitet werden mussten, führte und dass sich erst in Folge dieses Vorgangs der Kraftfluss $\mathfrak{E}_s$ zu $\mathfrak{E}_c$ hinzugesellte, kann man kaum im Zweifel sein, dass die Verschiebung an jeder Stelle durch das ganze $\mathfrak{E}$ bedingt ist. Der Leser wird vielleicht sogar den Eindruck erhalten, dass die Antwort so selbstverständlich sei, dass es sich gar nicht lohne, die Frage überhaupt aufzuwerfen. Man bedenke aber, dass es sich hier um die eingeprägten Kräfte $\mathfrak{E}_c$ handelte, von denen nicht ohne Weiteres angenommen werden darf, dass sie sich allen Gesetzen ebenso fügen wie die anderen, besser bekannten elektrischen Kräfte. Durch die angeführte Ueberlegung wird aber wohl jeder Argwohn nach dieser Richtung zerstreut.

Sobald nun Gleichgewicht eingetreten ist, muss im Innern des Leiters nothwendig $\mathfrak{D}$ und daher, nach den vorhergehenden Bemerkungen auch $\mathfrak{E}$ überall Null sein. Wir finden also $\mathfrak{E}_s = -\mathfrak{E}_c$, d. h. Abbildung 12 gibt zugleich auch die Vertheilung der elektrostatischen Kräfte in der Uebergangsstelle an.

Nun beachte man, dass nach § 39 div $\mathfrak{E}_s = 4\pi\varrho_f$ ist. Dort, wo $\mathfrak{E}_s$ und $\mathfrak{E}_c$ ihren grössten Werth BD angenommen haben (Abb. 12), hat $\mathfrak{E}_s$ keine div, die elektrische Ladung ist daher dort gleich Null. Links von B haben wir, da $\mathfrak{E}_c$ vom Kupfer zum Zink hin wirkt und daher $\mathfrak{E}_s$ nach rechts gerichtet ist, eine positive div von $\mathfrak{E}_s$ und daher positive Ladungen mit freier Elektricität, die räumlich über das Innere der Legirung vertheilt sind. Auf der rechten Seite von B ist dagegen div $\mathfrak{E}_s$ und daher ebenso die freie Ladung überall negativ. Die Raumdichte dieser Ladung ist der trigonometrischen Tangente des Winkels α proportional, den die geometrische Tangente an die Curve der Abbildung 12 bei der zugehörigen Stelle mit der Abscissenachse bildet.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, dass trotz dieser Ladungen mit freier Elektricität, weil $\mathfrak{D}$ überall Null ist, nirgends im Innern Ladungen mit wahrer Elektricität vorkommen. Man muss gerade in diesem Zusammenhange auf das Sorgfältigste zwischen diesen, ehemals für identisch gehaltenen Begriffen unterscheiden, wenn man nicht zu irrigen Schlüssen geführt werden will.

Nach alledem haben wir also links von B eine Schicht freier positiver Elektricität von der Dicke BA, die sich bis in das reine Zink hinein (bei einfachem Zusammenschweissen der beiden Metalle aber wenigstens auf molekulare Distanzen hin) erstreckt und rechts davon ebenso eine Schicht negativer Elektricität. Beide zusammen machen die v. Helmholtz'sche Doppelschicht aus. Von den dadurch gebildeten Kraftcentren strahlen durch die Uebergangsschicht hindurch elektrostatische Kräfte aus, die vom *Zn* zum *Cu* hin gerichtet sind und sich, zusammen mit den von den Ladungen der freien Oberflächen beider Stabhälften herrührenden elektrostatischen Kräften, ins Gleichgewicht mit den eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}_c$ setzen.

Die v. Helmholz'sche Theorie der Doppelschichten lässt sich nach dieser Betrachtung im Allgemeinen ganz wohl in Einklang mit der Maxwell'schen Elektricitätslehre bringen. Es bleibt nur die eine Schwierigkeit zurück, dass im Innern der Leiter an der Berührungsstelle freie Elektricitätsmengen auftreten, die an diesen Stellen gar nicht von wahren Ladungen begleitet sind. Dieser Umstand kann aber, wie mir scheint, nicht als ein durchschlagender Grund gegen die Annahme der Doppelschichten geltend gemacht werden. — Berührt sich ein Metall mit einem schlechten Leiter, wie Glas (das unter gewöhnlichen Umständen als Isolator angesehen werden darf, in diesem Zusammenhange aber ausdrücklich als schlechter Leiter bezeichnet werden muss), so wird, nachdem man beide Körper trennte, das Glas in den Berührungsschichten wahre Elektricität enthalten. Das Metall zeigt sich nach der Trennung zwar ebenfalls mit einer gleich grossen Menge von wahrer Elektricität entgegengesetzten Vorzeichens geladen; diese stammt aber nicht von der Berührungsstelle, sondern von der vorher frei gebliebenen Oberfläche her. Auch die Erscheinungen der elektrischen Endosmose führen, so weit ich sehe, nicht zu unlösbaren Widersprüchen zwischen der Hypothese der Doppelschichten und den Grundlagen der Maxwell'schen Theorie.

Von ganz anderen Gesichtspunkten geht die Heaviside'sche Darstellung aus. Die Einwürfe, die dieser bedeutende Forscher gegen die Lehre von den Doppelschichten erhebt, vermag ich allerdings nicht als gerechtfertigt anzuerkennen. Sie beruhen nach meiner Ansicht auf Verwechselungen der Rollen, die den Bestandtheilen von $\mathfrak{E}$ zukommen, bezw. auf der Verwechselung der wahren mit der freien Elektricität. So kann man zwar auf dem Boden der Maxwell'schen Theorie kaum zugeben, dass sich in einem metallischen Leiter (bei Elektrolyten ist dies anders, vgl. § 79) wahre Elektricitätsmengen ansammeln könnten; wenn man daraus aber, wie Heaviside, ein Argument gegen die Doppelschichten ableiten will, übersieht man, dass wahre Elektricitätsmengen in diesen Schichten überhaupt nicht ins Spiel kommen, sondern nur freie. Ebenso ist es, wenn gesagt wird, dass nach der Lehre von den Doppelschichten beim Uebergange eines elektrischen Stromes durch die Löthstelle eine Anhäufung oder Entziehung von Wärme analog dem Peltier'schen Phänomen, aber von entsprechend grösserer Intensität stattfinden müsse. Denn dies widerlegt sich dadurch, dass das ganze $\mathfrak{E}$, auf das es hier allein ankommt, überall im Innern Null ist und dass daher keine Energieumsetzung erwartet werden kann.

Wenn ich aber auch dieser Kritik der Doppelschichten nicht zustimmen kann, so muss ich doch die Heaviside'sche Auffassung der Kräfte $\mathfrak{E}_c$ als gleichberechtigt neben der v. Helmholtz'schen anerkennen. Man findet sie, wie hier bemerkt sein mag, in O. Heavisides Electr. Papers Bd. I, 1892, S. 348 u. f. ausführlich behandelt.

Unmittelbar aus der Erfahrung ist ja über die Sache selbst in der That nur dies bekannt, dass sich ausserhalb des Zinkkupferkörpers ein elektrostatisches Feld ausbildet. Dazu kommt, dass nach dem, was wir über die Eigenschaften der Leiter wissen, der elektrostatische Zwang $\mathfrak{D}$ und daher auch die ihm entsprechende elektrische Kraft im Gleichgewichtsfalle überall im Innern des Leiters verschwinden muss.

Verfolgen wir nun eine Kraftlinie in ihrem Verlaufe von der Zinkoberfläche durch die Luft zur Kupferoberfläche und schliessen sie durch eine willkürlich durch die Metallmasse gezogene Verbindungslinie ihrer beiden Endpunkte. Wir erhalten so einen geschlossenen Integrationsweg, für den das Linienintegral der elektrischen Kraft nothwendig von Null verschieden und zwar positiv ist, wenn wir die Richtung der Linie im Luftraume vom *Zn* zum *Cu* hin zählen. Für sich genommen, würde dieses Verhalten dem Energieprincipe zu widerstreiten scheinen, denn man erhielte offenbar ein Perpetuum mobile, wenn man eine wahre Elektricitätsmenge auf der geschlossenen Bahn unter dem Einflusse des besprochenen Kraftfeldes fortwährend kreisen liesse.

Es muss also noch etwas hinzukommen, was diesen Widerspruch aufhebt. Zunächst ist klar, dass die wahre Elektricitätsmenge bei dem geschilderten Laufe einmal aus dem Zink in die Luft und dann wieder aus der Luft in das Kupfer übertreten müsste, wobei neue Contactkräfte, nämlich solche zwischen Luft und Metall in Frage kommen, von denen bisher nicht die Rede war. Um deren Betrachtung zu umgehen, denke man sich aber eine Höhlung von kleinem

Durchmesser längs des Integrationswegs im Metalle ausgebohrt. Die wahre Elektricitätsmenge (also etwa ein geladenes Hollundermarkkügelchen) kann jetzt den vorher beschriebenen Kreislauf ganz in der Luft vollenden. Dabei fällt aber bei der Uebergangsstelle zwischen beiden Metallen in der Röhre die Kraft $\mathfrak{E}_c$ jetzt fort, während der Fluss der elektrostatischen Kraft $\mathfrak{E}_s$ keine merkliche Aenderung erfuhr. Vorher compensirten sich $\mathfrak{E}_c$ und $\mathfrak{E}_s$, jetzt bleibt nur $\mathfrak{E}_s$ und die Bedingungen sind hiermit so geändert, dass das Linienintegral für den geschlossenen Luftweg zu Null wird, wie es von dem Energieprincipe gefordert wird.

So gestaltet sich die Betrachtung nach der Theorie der Doppelschichten. Die Veranlassung, die wir zur Erklärung der Erscheinungen suchen, braucht aber ihren Sitz gar nicht unmittelbar an den Löthflächen zu haben, sondern sie kann auch über deren Grenzlinie vertheilt sein, also über die Linie, längs deren Zink, Kupfer und Luft zusammenstossen. Man fingire längs dieser Linie einen magnetischen Strom und die Erscheinungen sind vollständig erklärt. Der geschlossene Integrationsweg, von dem vorher die Rede war, umschlingt, wenn wir zunächst von dem Ausbohren eines Hohlweges absehen, den magnetischen Strom und das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ muss daher nach Gleichung (161) S. 166 in der That von Null verschieden sein. Zugleich folgt, dass für jede andere Integrationslinie zwischen Zink- und Kupferoberfläche das Linienintegral denselben Werth annehmen muss, d. h. dass eine constante Potentialdifferenz zwischen Zink und Kupfer besteht. Haben wir dagegen, wie vorher, einen Canal ausgebohrt, so tritt dort, wo die Löthfläche von der Canalwandung geschnitten wurde, abermals eine Linie auf, in der die 3 Medien (Zink, Kupfer, Luft) zusammenstossen. Wir müssen daher diese Linie gleichfalls als Bahn eines fingirten magnetischen Stromes von derselben Intensität, wie bei dem früheren betrachten, der aber wegen der geänderten Aufeinanderfolge der Medien im entgegengesetzten Sinne umläuft. Der durch die Höhlung geführte geschlossene Integrationsweg umschlingt daher zwei magnetische Ströme, deren Summe Null ergibt und das Linienintegral der elektrischen Kraft wird, wie es von dem Energieprincipe gefordert wird, wiederum zu Null.

Erfolgt der Uebergang vom Zink zum Kupfer nicht plötzlich, sondern wie bei der Besprechung von Abbildung 12 angenommen war, allmählich, so ist der fingirte magnetische Strom natürlich in entsprechender Oberflächenvertheilung über die ganze an die Luft grenzende Oberfläche des Uebergangsstückes anzunehmen. An der Zulässigkeit der vorhergehenden Betrachtungen wird dadurch nichts geändert.

Dieser fingirte magnetische Strom bildet übrigens, wie man leicht erkennt, in jeder Hinsicht und im Sinne des Dualitätsprincips das Gegenstück zu den fingirten elektrischen Strömen, die von Ampère zur Erklärung des Magnetismus angenommen wurden. So wie nach der Fernwirkungslehre ein geschlossener elektrischer Strom einer magnetischen Schale, also einer magnetischen Doppelschicht äquivalent ist, vertritt hier der magnetische Strom die supponirte elektrische Doppelschicht.

So wenig aber aus der Aequivalenz der Fernwirkungen geschlossen werden darf, dass den Erscheinungen des Magnetismus thatsächlich elektrische Strömungen zu Grunde liegen, so wenig wird in unserem Falle behauptet, dass dem fingirten magnetischen Strom eine reale Existenz zukomme. Er soll vielmehr nur eine Veranschaulichung dafür bilden, wie sich die Kräfte $\mathfrak{E}_c$ nach der Heaviside'schen Hypothese vertheilen. Die Ausgangsstelle für den Kraftfluss $\mathfrak{E}_c$ — und dies allein wird von dieser Hypothese wirklich ausgesagt — wird von der Linie bezw. Fläche gebildet, mit der die Uebergangsstelle zwischen beiden Metallen an die Luft angrenzt. Durch Wirkungen, über die wir zunächst keine weitere Rechenschaft zu geben vermögen, jedenfalls aber in Folge des Zusammentrittes der drei Medien (Zink, Kupfer, Luft) wird an dieser Stelle ein curl von $\mathfrak{E}_c$ (also ein Wirbel) hervorgerufen. Von der Erregungsstelle aus pflanzt sich $\mathfrak{E}_c$ in den übrigen von den drei Medien eingenommenen Raum fort, so dass es sonst

13*

überall den Bedingungsgleichungen curl $\mathfrak{E}_c = 0$ und div $\mathfrak{E}_c = 0$ genügt. Diese Vertheilung und die Art der Erregung ist genau identisch mit der, die von einem magnetischen Strom ausgehen müsste.

Zu $\mathfrak{E}_c$ tritt dann noch allenthalben die von den freien Ladungen herrührende elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}_s$ und die Ladungen vertheilen sich so, dass in den metallischen Medien die Vectorsumme $\mathfrak{E}_c + \mathfrak{E}_s$ zu Null wird. Da ferner überall div $\mathfrak{E}_c$ Null ist, hat daher im Innern der Metalle auch $\mathfrak{E}_s$ überall die div Null, d. h. freie Ladungen kommen im Innern der Metalle, auch an den Uebergangs- oder Löthstellen nirgends vor. Die Heaviside'sche Hypothese ist daher in der That von der Hypothese der Doppelschichten durchaus verschieden.

In allen der Beobachtung zugänglichen Fällen führen beide Anschauungen über die Vertheilung der Contactkräfte $\mathfrak{E}_c$ im Wesentlichen zu Ergebnissen derselben Art. Eine experimentelle Entscheidung zwischen beiden wird sich daher zunächst schwerlich herbeiführen lassen. Eine Abweichung würde sich zwar ergeben, wenn das eine Metall von dem anderen völlig eingeschlossen wäre. Im Gegensatze zu v. Helmholtz müsste man nach Heaviside annehmen, dass in diesem Falle kein Potentialunterschied zwischen beiden entsteht. Durch die Beobachtung lässt sich dieser Fall aber nicht prüfen, denn sowie etwa von dem eingeschlossenen Metalle ein Draht zu einem Elektrometer geführt würde, kämen nothwendig Grenzlinien vor, in denen drei Medien zusammenstiessen. Aehnlich verhält es sich, soweit ich sehe, bei anderen Versuchsanordnungen, die etwa zur Entscheidung dieser Frage gewählt werden könnten.

Ich habe mich bei der Besprechung dieser Frage länger aufgehalten, als es durch den Zweck dieser Schrift gerechtfertigt erscheinen könnte. Die Frage hat aber eine grössere Tragweite als man zunächst anzunehmen geneigt sein möchte. Nur wenn man sich mit ihr hinreichend vertraut gemacht hat, wird man deutlich verstehen, wie es kommt, dass es bei den periodisch veränderlichen elektromagnetischen Vorgängen weniger auf die Grösse der eingeprägten Kräfte selbst, als auf ihren curl ankommt. Ausserdem wird man nur dann zur weiteren Befestigung der Maxwell'schen Lehre in unserer Auffassung der Vorgänge gelangen können, wenn man ihre Consequenzen in allen solchen Fällen streng verfolgt.

Im Uebrigen lasse ich es hier unentschieden, welche der beiden Annahmen über die Vertheilung der Kräfte $\mathfrak{E}_c$ das Rechte trifft. In jedem Falle rechne ich $\mathfrak{E}_c$ stets zu den eingeprägten Kräften.

§ 78. Die thermoelektrische Kraft.

Ausser den vorher besprochenen Contactkräften treten an der Berührungsstelle von zwei Leitern noch andere Kräfte auf, die thermoelektrischen, die mit jenen nicht verwechselt werden dürfen. Die Vermuthung liegt zunächst allerdings nahe genug, dass die thermoelektrischen Kräfte mit den Contactkräften identisch seien, so nämlich, dass diese mit der Temperatur veränderlich wären und ihre Differenz für zwei auf verschiedener Temperatur gehaltene Löthstellen die im Thermoelemente beobachtete elektromotorische Kraft hervorriefe.

Wer an den Gegenstand neu herantritt, wird zunächst stets versuchen, ob er mit der soeben geschilderten Auffassung ausreichen kann. Von selbst drängt sich ja die Annahme auf, dass die elektrische Contactkraft von der Temperatur der Löthstelle abhängig sei und dass daher in einem aus zwei Metallen gebildeten Kreise, sobald die beiden Löthstellen auf verschiedenen Temperaturen gehalten werden, ein Strom zu Stande kommen müsse. Das ist aber gerade, was die Erfahrung bestätigt. Nur mit Widerstreben und unter dem Drucke der zwingendsten Gründe wird man daher diese so einfache Vorstellung zu opfern bereit sein.

Solche Gründe liegen aber vor und zwar werden sie durch das Peltier'sche Phänomen geliefert. Wenn die Löthstelle von zwei Metallen von einem elektrischen Strome durchsetzt wird, tritt je nach der Stromrichtung eine Wärmebindung oder umgekehrt eine Wärmeentwickelung ein, die der Menge nach von der Temperatur der Löthstelle abhängig, der Stromstärke proportional und im Sinne des Energieprincips der Arbeit der thermoelektrischen Kräfte äquivalent ist. Hierdurch verräth sich aber die Grösse des durch die thermoelektrischen Kräfte verursachten Potentialsprungs an jeder Löthstelle gesondert und zwar entspricht nach der Erfahrung die Menge der Peltier'schen Wärme stets Potentialunterschieden von derselben Grössenordnung, wie sie der resultirenden thermoelektrischen Kraft eines Thermoelements zukommt. Käme der Strom nur durch eine Differenz der elektrischen Contactkräfte an beiden Löthstellen zu Stande, so müsste die Peltier'sche Wärme an jeder Löthstelle einer elektrischen Arbeit äquivalent sein, wie sie einem Potentialunterschiede von der Grössenordnung eines Volt entspricht. Anstatt dessen ist aber in den meisten Fällen der durch die Peltier'sche Wärme angezeigte Potentialsprung nur gleich einigen Tausendsteln eines Volt.

Die thermoelektrische Kraft $\mathfrak{E}_t$ unterscheidet sich daher von der Contactkraft $\mathfrak{E}_c$ durchaus darin, dass mit ihrem Auftreten in elektrisch durchströmten Leitern ein Energieumsatz verbunden ist, der neben der durch den Zerfall und die stetige Neubildung des elektrischen Zwangszustandes bedingten Energieverwüstung (der Joule'schen Wärme) unabhängig nebenherläuft. Im Gegensatze zur Joule'schen Wärmeentwickelung stellt dieser Energieumsatz einen umkehrbaren Process dar. Der Mechanismus, durch den diese umkehrbare Verwandlung ermöglicht und bedingt wird, ist bisher noch vollständig in Dunkel gehüllt; ebenso fehlt uns bisher jede zuverlässige Kenntniss über die Vertheilung der Kräfte $\mathfrak{E}_t$ im Innern der Körper an der Löthstelle und fern von derselben.

Ein zweiter Grund, der gegen die Identificirung der thermoelektrischen Kräfte mit den Contactkräften spricht, fliesst aus dem zweiten Hauptsatze der Thermodynamik. Ein Thermoelement kann nämlich als eine Vorrichtung angesehen werden, durch die Wärme in elektrische Energie und damit in Arbeit (da, von nebensächlichen Verlusten abgesehen, elektrische Energie mit Hülfe eines Elektromotors jederzeit vollständig in Arbeit verwandelt werden kann) umgewandelt wird, während zugleich, wie bei allen calorischen Maschinen, durch den Arbeitsprocess Wärme von der heissen zur kalten Löthstelle übergeführt wird. Wendet man auf diese calorische Maschine unter der Annahme, dass die thermoelektrische Kraft einfach gleich der Differenz der Contactkräfte zu setzen sei, den zweiten Hauptsatz an, so gelangt man zu dem Schlusse, dass der Potentialsprung an der Löthstelle zweier Metalle der absoluten Temperatur proportional sein müsse. Das wird aber von der Erfahrung abermals nicht bestätigt.

Freilich führt die zuletzt erwähnte Betrachtung, auf deren eingehendere Wiedergabe verzichtet werden kann, nicht nur zu dem Schlusse, dass die Thermokräfte von den Contactkräften verschieden sein müssen, sondern sie nöthigt zugleich auch dazu, die Löthstellen nicht als den alleinigen Sitz der thermoelektrischen Kräfte anzusehen, sondern solche auch zwischen verschieden warmen Stellen desselben Metalles, also überall in einem Metalle, dessen Temperatur mit dem Orte wechselt, anzunehmen. Dem Peltiereffecte gesellt sich so der Thomsoneffect hinzu, der von W. Thomson (Lord Kelvin) zuerst theoretisch erschlossen und dann experimentell bestätigt wurde.

Der geordneten Einfügung der thermoelektrischen Kräfte in das System der eingeprägten elektrischen Kräfte steht die Schwierigkeit entgegen, die Möglichkeit der Energieumwandlung nachzuweisen. In der That muss ja, wie früher (S. 190) für die Kräfte $\mathfrak{E}_c$, so jetzt für die $\mathfrak{E}_t$ geschlossen werden, dass sie solche Bestandtheile der ganzen Kraft $\mathfrak{E}$ ausmachen, die an der Herstellung des elektrostatischen Zwanges $\mathfrak{D}$ betheiligt sind. Im Gleichgewichtsfalle ist also an der Löthstelle das ganze $\mathfrak{E}$ gleich Null zu setzen und damit fällt jeder Anlass für eine elektrische Arbeitsleistung, also für einen Energieumsatz fort. Dieselben Erwägungen, die uns lehrten, dass für die Contactkräfte $\mathfrak{E}_c$ kein Anlass zu einer Energieumwandlung vorhanden sei, bleiben auch hier zunächst unverändert gültig, führen aber hier zu einem der Erfahrung widersprechenden Ergebnisse.

Wenn man auch ganz auf die speciellere Untersuchung der Thermoelektricität verzichten will, bleibt man bei der Darstellung der allgemeinen Theorie nach dem Maxwell'schen Schema unter diesen Umständen doch mindestens verpflichtet, die Möglichkeit der Hebung dieses Widerspruches auf irgend eine Art nachzuweisen. Gleichgültig ist dabei, ob die gegebene Erklärung auch wirklich zutrifft: sie hat ja nur den Zweck, zu zeigen, dass die Schwierigkeit, die sich ergab, nicht unüberwindlich ist und dass daher aus ihr kein Argument gegen die Maxwell'sche Theorie abgeleitet werden kann.

Zu diesem Zwecke greife ich auf die im vorigen § gegebene Heaviside'sche Darstellung über die Vertheilung der Kräfte $\mathfrak{E}_c$ zurück. Der Draht sei also an den Löthstellen und überall, wo wegen des bestehenden Temperaturgefälles in jedem der beiden Metalle thermoelektrische Kräfte auftreten, von magnetischen Strömen umgeben, die wir jetzt als Erreger der thermoelektrischen Kräfte betrachten wollen. Damit ist schon ausgesagt, dass die Stärke der magnetischen Oberflächenströme an jeder Stelle in fester Abhängigkeit von der Temperatur stehen muss. Wird nun der Draht von einem elektrischen Strome durchflossen, so geht von diesem eine magnetische Kraft aus, die je nach der Stromrichtung gleich oder entgegengesetzt mit der Richtung des magnetischen Oberflächenstromes läuft. Sie kann aber nicht dazu dienen, den magnetischen Oberflächenstrom unmittelbar zu verstärken oder zu schwächen, da dieser nach Voraussetzung mit der Wärmebewegung an der betreffenden Stelle in fester Verkuppelung steht. Durch den Mechanismus der Verkuppelung wird also die Arbeit der vom elektrischen Strome ausgehenden magnetischen Kraft zunächst in Wärmebewegung umgesetzt und nur insofern, als damit zugleich eine Temperaturerhöhung erzielt wird, zum Theile zur Aenderung des magnetischen Stromes selbst verwendet.

Die verlangte Erklärung ist hiermit geliefert. Man erkennt die Möglichkeit einer umkehrbaren Energieabgabe oder -Aufnahme an der Löthstelle u. s. w., ohne dass eine resultirende elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ oder ein elektrostatischer Zwang $\mathfrak{D}$ während des Gleichgewichtszustandes angenommen werden müsste. Von den zur Veranschaulichung der Vertheilung der Contactkräfte $\mathfrak{E}_c$ fingirten magnetischen Strömen unterscheiden sich die hier betrachteten wesentlich dadurch, dass von jenen anzunehmen ist, dass sie von der magnetischen Kraft des elektrischen Leitungsstromes gar nicht beeinflusst werden. Mit anderen Worten heisst dies, dass die dort fingirten Ströme eben nur für die kurzgefasste bildliche Wiedergabe einer bestimmten Vertheilungsart der Kräfte $\mathfrak{E}_c$ dienen konnten, mit wirklichen magnetischen Strömen aber sonst gar nichts zu thun hatten, während die für die Erklärung der Kräfte $\mathfrak{E}_t$ angenommenen sich vollständiger mit dem wirklichen Verhalten magnetischer Ströme decken, indem sie auf magnetische Kräfte reagiren. — Constante und dauernde magnetische Ströme, wie sie hier verwendet wurden, sind uns in der Natur allerdings nicht bekannt. Als Demonstrationsmittel wird man sie aber etwa mit demselben Rechte wie die Ampère'schen Molekularströme benutzen können.

§ 79. Die hydroelektrische Kraft.

Wie die thermoelektrische unterscheidet sich die hydroelektrische Kraft von der gewöhnlichen elektrischen Contactkraft zwischen zwei Metallen dadurch, dass sie einen umkehrbaren Energieumsatz zur Folge hat, sobald der Raum, in dem sie auftritt, von einem elektrischen Strome durchflossen wird. Der Mechanismus, durch den dies ermöglicht wird, ist aber nicht in demselben Maasse in Dunkel gehüllt, wie im vorigen Falle. Wir sind nicht genöthigt, einen Zusammenhang frei zu ersinnen, nur um die Verträglichkeit der Erscheinung mit den Grundlagen der Theorie überhaupt darzuthun, sondern können uns dabei auf allgemein angenommene Anschauungen stützen, deren Wahrscheinlichkeit durch eine Reihe von Thatsachen in hohem Maasse verbürgt ist.

Von vornherein könnte man ebensogut eine Coexistenz der hydroelektrischen mit der gewöhnlichen Contactkraft erwarten, wie dies bei der thermoelektrischen Kraft angenommen werden musste. Der Vergleich, der an den Elektroden umgesetzten Energiemengen mit den dort erzeugten Potentialunterschieden lehrt aber, dass die hydroelektrische Kraft in der That identisch mit der Contactkraft sein muss, sobald mindestens der eine der beiden Leiter ein Elektrolyt ist. Wenn dies nicht zuträfe, hätte der Versuch, die Potentialdifferenz aus den thermochemischen Zahlen und den chemischen Aequivalenten zu berechnen, fehlschlagen müssen. Man kann dies wohl auch so ausdrücken, dass die gewöhnliche Contactkraft fortfällt, wenn Elektrolyte ins Spiel kommen und dass dafür die hydroelektrische Kraft eintritt. Die Thermokräfte bestehen aber daneben weiter. Zugleich bildet dieser Zusammenhang das gewichtigste Argument für die früher erwähnte Anschauung, dass den „gewöhnlichen" Contactkräften überhaupt keine reale Existenz zukomme, dass vielmehr die ihnen zugeschriebenen Erscheinungen in Wirklichkeit durch hydroelektrische Kräfte bedingt seien.

Zu der gewöhnlichen Contactkraft, wie sie in § 77 behandelt wurde, verhält sich die hydroelektrische Kraft wie die Constitution des elektrischen Stromes in Metallen zu der in Elektrolyten. Es ist daher nöthig, zunächst auf diese etwas näher einzugehen. Im Lichte der Dissociationstheorie ist der elektrische Strom in den Elektrolyten der Hauptsache nach ein Convectionsstrom, indem die Ionen die an sie unveränderlich gefesselten Ladungen mit sich fort führen. Mit dem Convectionsstrome combinirt sich aber, wie aus den Betrachtungen in § 66 hervorgeht, stets noch ein Verschiebungsstrom, der diesen so ergänzt, dass der sich aus beiden zusammensetzende wahre Strom auch im Innern der Elektrolyte überall die solenoidale Bedingung erfüllt. Das Lösungsmittel des

Elektrolyten (also etwa das chemisch reine Wasser) haben wir als ein Dielektricum zu betrachten.

In einem Leiter von dieser Zusammensetzung steht offenbar der Grundsatz der Maxwell'schen Theorie, dass die Elektricität sich stets wie eine incompressible Flüssigkeit bewege, nicht in Widerspruch mit einer Ansammlung wahrer Elektricität im Innern des Leiters, worauf schon früher hingewiesen war. Besteht ferner ein elektrostatischer Zwang $\mathfrak{D}$ im Medium (also im Lösungsmittel), so gleicht er sich nicht in derselben Weise wie in den Metallen, falls er nicht andauernden Ersatz findet, durch allmählichen Zerfall aus, sondern dadurch, dass die Ionen von der zugehörigen elektrischen Kraft Bewegungsantriebe erhalten und dadurch Verschiebungen erfahren, womit eine Aenderung des elektrischen Kraft- und Verschiebungsflusses verbunden ist, die so lange anhält, bis die Polarisirung des Mediums verschwunden ist. Die Joule'sche Wärme hat in diesem Falle in der zur Verschiebung der Ionen in der gedachten Richtung erforderlichen Reibungsarbeit ihren Ursprung.

Im Gleichgewichtszustande muss zwar auch hier die resultirende elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ gleich Null sein. Unter $\mathfrak{E}$ ist aber jetzt der Durchschnittswerth der elektrischen Kraft für ein Raumelement zu verstehen, dessen Dimensionen gross sind im Vergleiche zu den Abständen zwischen den Ionen. In kleineren Bezirken besteht auch im Gleichgewichtsfalle (diesen für den ganzen Leiter betrachtet) ein Kraft- und Verschiebungsfluss, der stetem Wechsel unterworfen ist, der sich dabei aber stets so vertheilt, dass keine Richtung im Raume bevorzugt ist, dass also der Durchschnittswerth für jeden Bezirk höherer Grössenordnung verschwindet. Die Entnahme von Ionen derselben Art aus einem solchen Bezirke bedeutet nicht nur einen elektrischen Strom, sondern zugleich auch einen chemischen Process, bei dem die molekulare Energie des chemischen Zusammenhanges frei wird.

Betrachten wir nun eine Elektrode, von der ein unendlich kleiner Strom ausgeht. Der Strom soll unendlich klein sein, weil wir dann die elektrische Kraft und den elektrostatischen Zwang 𝔇 nahezu als Null betrachten, d. h. nahezu elektrisches Gleichgewicht voraussetzen können. Anstatt dessen könnte man die ins Auge zu fassende Zustandsänderung auch als eine virtuelle in dem aus der Mechanik bekannten Sinne betrachten, die während des vollkommenen Gleichgewichtszustandes ins Werk gesetzt wird. Die elektrische Kraft 𝔈 ist nun zwar im Mittel überall Null, die blosse Ueberführung eines Ion würde daher keinen Arbeitsaufwand verursachen, wohl aber die Loslösung aus dem molekularen Zusammenhange und der Eintritt in einen neuen, die für die Ueberführung der mit dem Ion verbundenen Ladung an die Elektrode nothwendig verbunden sind. Man versteht nun vollkommen, dass die betrachtete virtuelle Zustandsänderung mit einem Energieumsatze verbunden, dass dieser Umsatz umkehrbar ist und dass er, wenn eine Tendenz zu dem chemischen Processe nach einer bestimmten Richtung hin vorliegt, zu einer hydroelektrischen Kraft und damit zu einer Potentialdifferenz der beiden Körper führt.

Wenn durch diese Betrachtung der innere Zusammenhang des ganzen Vorgangs auch verständlich gemacht und der Unterschied gekennzeichnet ist, der zwischen der hydroelektrischen Kraft und der gewöhnlichen Contactkraft besteht, so sind wir doch von einer vollständigen Aufhellung der hier vorliegenden Beziehungen immer noch weit entfernt. Namentlich steht eine sichere Entscheidung über den Zusammenhang zwischen der chemischen Kraft und der elektrostatischen Kraft zwischen den Ionen noch aus, wenn auch bis zu einem gewissen Grade eine einfache Identität beider wahrscheinlich gemacht ist.*)

§ 80. Eingeprägte Kräfte der inneren Magnetisirung.

Auf der magnetischen Seite vermag man ohne eingeprägte Kräfte auszukommen, die den hydroelektrischen, thermo-

*) Durch die neueren Arbeiten des Herrn H. Ebert wurde diese Annahme noch weiterhin bestätigt.

elektrischen oder Contactkräften analog wären. Der Grund für das Fehlen der entsprechenden magnetischen Kräfte liegt darin, dass keine magnetischen Leitungsströme vorkommen, während auch die erwähnten elektrischen Kräfte sich immer nur im Zusammenhange mit dem Auftreten von elektrischen Leitungsströmen bemerkbar machen.

Nur zu der Contactkraft zwischen zwei dielektrischen Körpern wäre ein magnetisches Gegenstück möglich. Ob zwischen zwei im strengen Sinne nichtleitenden Körpern überhaupt eine elektrische Contactkraft auftritt, ist indessen noch sehr zweifelhaft; die der Wirkung der Contactkraft zuzuschreibenden Erscheinungen der Reibungselektricität bei Körpern, wie Glas, Seide, Harz u. s. f. werden zweifellos nur dadurch ermöglicht, dass die an die Contactfläche unmittelbar angrenzenden Theile dieser Körper in geringem Grade elektrisch leiten. Andererseits könnte sich aber, selbst wenn beim Contacte von zwei Körpern eingeprägte magnetische Kräfte $\mathfrak{H}_c$ vorkommen sollten, da jede magnetische Leitung in der Natur ausgeschlossen zu sein scheint, deren Auftreten für uns überhaupt nicht bemerklich machen.

Nur eine Gruppe von Erscheinungen fügt sich auf der magnetischen Seite der Theorie nicht ohne Weiteres in den gegebenen Rahmen und fordert daher zur Aufstellung eingeprägter magnetischer Kräfte heraus. Das sind die Erscheinungen des remanenten und permanenten Magnetismus. Allerdings ist auch hier die Einführung der eingeprägten Kräfte, wie ich früher zeigte, entbehrlich, um die Erscheinungen zu erklären. Man braucht dazu nur zwischen weichen und harten Körpern zu unterscheiden und, wie es in § 55 besprochen wurde, unter den harten solche Körper zu verstehen, für die sich die elektrische Kraft $\mathfrak{H}$ bei elektrischem Gleichgewichte nicht von einem Potentiale ableiten lässt.

Die Entstehung des remanenten Magnetismus erklärt sich dann leicht durch die folgende Betrachtung. Zuerst sei unser System ganz frei von magnetischen Kraft- und Inductionslinien. Wir schliessen nun einen Stromkreis. Sowie der elektrische

Strom entsteht, gehen von der Strombahn Inductionslinien aus, die diese zuerst eng umketten, bei wachsender Stromstärke sich dann allmählich erweitern, indem sie neu entstehenden Platz machen und sich so in den ganzen Raum ausbreiten. Wenn der Beharrungszustand erreicht ist, hat sich ein magnetisches Feld ausgebildet von der Art, dass in allen Theilen des Raumes, die von magnetisch weichen Körpern eingenommen sind, die Gleichungen

$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}; \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0; \quad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = 0$$

befriedigt sind.

Die zweite von diesen Gleichungen kann man als das Differentialgesetz der longitudinalen und die dritte als das der transversalen Fortpflanzung des magnetischen Feldes bezeichnen. Nur daraus, dass diese Gleichungen an jedem Orte erfüllt sein müssen, folgt die Fortpflanzung durch den ganzen Raum von einem Erregungscentrum aus und zwar in der Art, dass immer nur unmittelbar benachbarte Gebietstheile bestimmend auf einander einwirken und jede directe Fernwirkung vermieden ist. Der veränderliche Zustand, während dessen neue Inductionslinien aus der Strombahn hervorquellen und die alten verdrängen und erweitern, stellt eine magnetische Welle dar. Die jeweilige Veränderung schreitet mit der Lichtgeschwindigkeit durch die Medien fort und macht sich an einem weiter abgelegenen Orte erst nach Verlauf der entsprechenden Zeitdauer bemerkbar. Die Fernwirkungstheorie nimmt in solchen Fällen, wie bekannt, eine instantane Uebertragung der Wirkung durch das ganze magnetische Feld an.

So lange keins von den magnetischen Metallen im Raume vorhanden ist und so lange die Entstehung anderer elektrischer Leitungsströme neben dem Erregungsstrome vermieden ist, schreitet die magnetische Welle fast genau ebenso durch den Raum, als wenn dieser ein Vacuum darstellte oder nur von Luft erfüllt wäre. Sowie aber die Inductionslinien bei ihrer Ausbreitung auf Eisen treffen, wird der weitere Verlauf dadurch geändert. Wäre das Eisen absolut weich, so käme nur die

Aenderung der Permeabilität μ zur Geltung. Der durch die vorher genannten drei Gleichungen regierte Vorgang müsste sich dann so gestalten, dass sich die Inductionslinien im Eisen mehr zusammendrängen, — eine Erscheinung, die jetzt nicht weiter erörtert zu werden braucht.

Sobald das Eisen magnetisch hart ist, ändert sich aber auch die letzte der drei Gleichungen. Gerade der Umstand, dass ein curl von $\mathfrak{H}$ nicht bestehen konnte, veranlasste an jeder Stelle, an der die magnetische Welle anlangte, dass auch die benachbarten Inductionslinien etwas ausweichen mussten, bestimmte also mit anderen Worten die Fortpflanzung in den weiteren Raum. Da diese Fortpflanzung hier rechtwinklig zur Richtung der Inductionslinien erfolgt, bezeichnete ich vorher schon curl $\mathfrak{H} = 0$ als die Gleichung der transversalen Fortpflanzung des Kraftflusses.

Inductionslinien, die bei ihrer Expansion auf absolut harte Körper auftreffen, werden an dieser Stelle einfach festgehalten. An der Grenzfläche bildet sich ein beim weiteren Auftreffen der nachfolgenden Inductionslinien immer mehr anwachsender curl von $\mathfrak{H}$ aus, ohne dass der betroffene Körper reagirte. Er vermag eben einen beliebig grossen Wirbel der Kraft $\mathfrak{H}$ vermöge der Art seiner Zusammensetzung in seinem Innern (oder in der an die Luft angrenzenden Schicht) aufrecht zu erhalten. In Körper dieser Art vermöchte überhaupt kein magnetisches Feld einzudringen; sie wären vollständige Schirme gegen magnetische Wirkungen.

Absolut harte Körper gibt es, soviel uns bekannt ist, nicht. Aehnlich verhält sich indessen harter Stahl, so lange die darauf auftreffenden Inductionslinien nur zu geringen Feldern gehören. Es findet dann nur ein Eindringen in die oberflächlichsten Schichten statt. Sowie die Feldstärke anwächst, findet ein Eindringen in immer grössere Tiefen statt: der Stahl vermag zwar vermöge seiner magnetischen Härte an jeder Stelle einen gewissen Werth des Wirbels der magnetischen Kraft (oder von curl $\mathfrak{H}$) zu ertragen, aber doch immer nur einen endlichen Werth, so dass die transversale

Fortleitung des Kraftflusses zwar beschränkt, aber nicht ganz verhindert ist. Wir müssen indessen schon grosse Kräfte aufwenden, um überhaupt eine merkliche Zahl von Kraftlinien in Körper aus hartem Stahle einzudrängen. Bei sehr umfänglichen Stahlstücken gelingt dies überhaupt nicht; man vermag dann nur die oberflächlichen Schichten einigermassen mit Inductionslinien zu sättigen. Desshalb muss man grössere Stahlmagnete aus einer Anzahl von dünnen Lamellen herstellen, die einzeln magnetisirt werden.

Wenn es uns nun durch den erregenden Strom auf diese Weise gelungen ist, eine grössere Zahl von Inductionslinien durch einen magnetisch harten Körper zu treiben, wollen wir den Strom wieder vermindern und ihn dann ganz eingehen lassen. Der Strom hielt dort, wo er floss, einen Wirbel von $\mathfrak{H}$ aufrecht. Dieser das ganze Feld erregende Wirbel vermindert sich zugleich mit dem Strome: die Kraftlinien ziehen sich zusammen und lösen sich gewissermassen im Leiter auf, indem sie die ihnen zugehörige Energie an den Strom zurückerstatten (Selbstinduction). Zunächst beginnt dieser Process unmittelbar am Leiter, die weiter folgenden Inductionslinien drängen aber nach und ziehen sich ebenfalls zusammen. Der Grund besteht wieder darin, dass das Medium ausserhalb keinen Wirbel der Kraft $\mathfrak{H}$ ertragen kann. Die Gleichung $\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 0$ gibt auch jetzt wieder die Eigenschaft des Mediums an, durch die die Uebertragung der magnetischen Welle nach rückwärts bedingt wird.

Nur vor den magnetischen harten Körpern macht die Entmagnetisirungswelle Halt oder sie verändert wenigstens ihre Form. Vorher schützte den Stahl die Eigenschaft, dass er einen gewissen Werth von $\operatorname{curl} \mathfrak{H}$ zu ertragen vermochte vor einem stärkeren Eindringen des Inductionsflusses; jetzt wird dadurch umgekehrt der einmal eingedrungene Inductionsfluss zum grossen Theile zurückgehalten. Nach dem Erlöschen des erregenden elektrischen Stromes haben wir einen remanenten Magneten zurückbehalten.

Nachdem ein solcher einmal gewonnen ist, vermögen wir leicht auch ohne Dazwischenkunft eines elektrischen Stromes andere damit herzustellen. Im Allgemeinen werden sich ja die in dem ersten Magneten zurückgebliebenen Kraftlinien durch die Luft hindurch schliessen. Bringen wir nun in diesen Luftraum ein zweites Eisenstück, so wird dieses wieder, wie vorher das erste, zunächst temporär, und wenn es magnetisch hart ist, auch permanent magnetisirt.

Aus dieser Darlegung erkennt man, dass die Einführung eingeprägter Kräfte zur Erklärung des remanenten Magnetismus in der That vollständig entbehrlich ist. Allerdings müssen wir den magnetisch harten Körpern zu diesem Zwecke solche Eigenschaften beilegen, die verhindern, dass die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ in ihnen von einem Potentiale abgeleitet werden kann und die ferner auch die Anwendung der ersten Hauptgleichung (§ 60, Schlussbemerkungen) auf solche Körper nicht ohne Weiteres gestatten.

Ich werde aber trotzdem jetzt eine, wenigstens formell, von der vorigen völlig verschiedene Darstellung der Erscheinungen des remanenten Magnetismus geben, indem ich eingeprägte Kräfte zu Hülfe nehme. Damit ist nicht gesagt, dass diese Darstellung mit der vorigen concurrire. Die Zuhülfenahme eingeprägter Kräfte ist ja, wie man sich erinnern wird, nur ein Auskunftsmittel, durch das wir Erscheinungen in unser System mit aufnehmen, für die sich bisher keine eigentliche Erklärung gefunden hat. Betrachten wir daher die vorhergehende Darlegung, die freilich noch der experimentellen Bestätigung bedarf, als die richtige Erklärung, so ist die Behandlung mittelst eingeprägter Kräfte daneben trotzdem zulässig. Die eingeprägten Kräfte sind dann nur die Symbole, die in unseren Gleichungen die als magnetische Härte bezeichnete Eigenschaft zum Ausdrucke bringen sollen. Daneben hat diese Behandlung den Vorzug, dass die Frage formell, d. h. in der Gestaltung unserer Gleichungen zu einem gewissen Abschlusse gebracht wird, ohne dass damit weiteren Untersuchungen über das Wesen des remanenten Magnetismus der Weg versperrt würde. Denn jede andere eigentliche Erklärung des Thatbestandes, wie etwa die Ampère'sche Hypothese der Molekularströme, neben der vorher gegebenen würde ebenso durch die eingeprägten Kräfte gedeckt werden, wenn den Symbolen selbst in diesem Falle auch eine andere Deutung zu geben wäre.

Zum Unterschiede von anderen eingeprägten wollen wir die Kräfte, um die es sich hier handelt, die **eingeprägten Kräfte der inneren Magnetisirung** nennen und sie mit $\mathfrak{H}_i$ bezeichnen. Wir nehmen in diesem Zusammenhange ferner an, dass der von elektrischen Strömen unmittelbar herrührende, sowie überhaupt jeder von angrenzenden Gebietstheilen übertretende (also auch der von anderen mit remanentem Magnetismus behafteten Gebietstheilen ausgehende) Kraftfluss sich durch magnetisch harte Körper nach denselben Gesetzen verbreite wie durch magnetisch weiche, dass also, wenn $\mathfrak{H}_l$ den aus diesen Ursachen herrührenden oder, wie man sagen kann, den durch longitudinale und regelmässige transversale Fortleitung zu Stande kommenden Bestandtheil bezeichnet, $\operatorname{curl} \mathfrak{H}_l = 0$ ist. Ferner setzen wir

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_i + \mathfrak{H}_l; \quad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{H}_i;$$
$$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \mu \mathfrak{H}_i + \mu \mathfrak{H}_l = \mathfrak{B}_i + \mathfrak{B}_l; \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \operatorname{div} \mathfrak{B}_i = \operatorname{div} \mathfrak{B}_l = 0.$$

Nehmen wir an, dass zunächst überall $\mathfrak{H} = 0$ war und führen wir jetzt in einem einzigen Volumenelemente eine eingeprägte Kraft $\mathfrak{H}_i$ ein, so kommt in diesem Volumenelemente der Inductionsfluss $\mathfrak{B}_i = \mu \mathfrak{H}_i$ zu Stande. Dieser bedeutet eine innere Magnetisirung des Volumenelementes, die nur durch eine in ihm selbst wirkende (fingirte) Ursache $\mathfrak{H}_i$ bedingt ist. Daraus erklärt sich die für $\mathfrak{H}_i$ gewählte Bezeichnung. Der durch $\mathfrak{H}_i$ erzeugte Inductionsfluss pflanzt sich dagegen weiterhin in regelmässiger Weise fort, falls sich nicht in Folge davon auch an anderen Stellen des Körpers Kräfte $\mathfrak{H}_i$ einstellen.

Durch passende Verfügung über die Kräfte $\mathfrak{H}_i$ können wir offenbar einen vorher ohne solche gegebenen Inductionsfluss in beliebiger Weise modificiren und uns dadurch jedem beobachteten, von dem regelmässigen abweichenden Verhalten eines Körpers anpassen. Wenn es zweckmässig erschiene, könnte man dadurch sogar die Veränderlichkeit der Permeabilität aus der Darstellung der Theorie entfernen. Man brauchte nur anzunehmen, dass das wechselnde Verhältniss zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ durch das Hinzutreten eingeprägter Kräfte bedingt wäre. Diese weitgehende Verwendbarkeit des Hülfsbegriffs der eingeprägten Kraft hängt von der Willkür ab, die mit der Einführung eingeprägter Kräfte überhaupt verbunden ist. Man darf aber nicht vergessen, dass es sich dabei nicht um eine wirkliche Erklärung der Erscheinungen, sondern nur um einen Rechenbehelf handelt, mit dem wir die Lücke in unserer Erkenntniss des wahren Zusammenhanges verdecken.

Der wahre Zusammenhang ist auf diesem Gebiete noch keineswegs so vollständig aufgehellt, dass man die definitive Fassung der Theorie mit einiger Sicherheit voraussehen könnte. Nach der im Eingange dieses § gegebenen Darstellung, die mir den Thatsachen vorläufig am besten gerecht zu werden scheint, wenn sie auch für die Veränderlichkeit der Permeabilität in den magnetischen Metallen und für den auffallend hohen Werth, den sie in diesen annimmt, keine Erklärung liefert, kommt es nicht auf $\mathfrak{H}_i$ selbst, sondern auf dessen curl an. Durch curl $\mathfrak{H}_i$ wird nämlich ein Maass dafür gegeben, bis zu welchem Grade und in welcher Richtung sich die Eigenschaft der magnetischen Härte in einem gegebenen Falle und an der betreffenden Stelle des Körpers geltend macht.

In jedem Falle müssen wir annehmen, dass entweder $\mathfrak{H}_i$ selbst, oder, was auf dasselbe hinauskommt, der curl davon nicht nur von der Art des Körpers, sondern auch von dem in ihm bestehenden Inductionsflusse abhängig ist. Für die nähere Bestimmung des Gesetzes dieser Abhängigkeit fehlt aber bis jetzt jeder Anhaltspunkt. Den besten Weg zu seiner Erforschung scheint die Beobachtung der magnetischen Schirmwirkungen darzubieten. Ein absolut weicher Eisenmantel um

14*

einen geradlinigen Strom vermöchte den sich aussen anschliessenden Luftraum gar nicht gegen den von dem Strome ausgehenden Inductionsfluss zu schirmen. Der Inductionsfluss würde überall in der Umgebung genau so gross, als wenn der Eisenmantel gar nicht vorhanden wäre. Ein magnetisch absolut harter Mantel würde im Gegensatze dazu gar keine Kraftlinien in den Luftraum übertreten lassen. Die Beobachtung des thatsächlichen Verhaltens (etwa mit Hülfe einer Prüfungsspirale im äusseren Raume) bietet keine Schwierigkeiten und stellt nähere Aufschlüsse über diese wichtige Frage in Aussicht.

§ 81. Eingeprägte Kraft der inneren Elektrisirung.

Der Kraft $\mathfrak{H}_i$ stellen wir ihr Analogon $\mathfrak{E}_i$ zur Seite, freilich mit der ausdrücklichen Bemerkung, dass in isotropen und homogenen Körpern vermuthlich $\mathfrak{E}_i$ überall gleich Null zu setzen ist. Denn aus den Untersuchungen in § 55 folgte, dass wir die nichtleitenden Körper als dielektrisch weich betrachten müssen. Es ist also wenigstens die Einführung einer eingeprägten Kraft $\mathfrak{E}_i$ zur Berücksichtigung einer regelwidrigen transversalen Fortpflanzung des elektrischen Kraftflusses hier nicht wie bei den Problemen des remanenten Magnetismus erforderlich. — In Uebereinstimmung damit steht es, dass nach den vorliegenden Erfahrungen Rückstandsbildungen (wie sie bei den Entladungen eines Condensators beobachtet werden) in isotropen und homogenen Dielektricis nicht vorzukommen, dass diese vielmehr stets durch eine heterogene Beschaffenheit (Einschluss leitender Partikelchen u. s. f.) des Mediums bedingt zu sein scheinen.

Den bei der Erwärmung und bei einseitigem Drucke in krystallinischen Körpern auftretenden pyroelektrischen und piëzoelektrischen Erscheinungen, — deren blosse Erwähnung hier genügen muss — denken wir uns dagegen stets durch die Einführung eingeprägter Kräfte in entsprechender Vertheilung Rechnung getragen und betrachten diese als Bestandtheile von $\mathfrak{E}_i$.

§ 82. Die beiden Hauptgleichungen mit Berücksichtigung der eingeprägten Kräfte.

Die Einführung der ersten Hauptgleichung in den Formen (143) und (153) erfolgte im vorigen Abschnitte unter der ausdrücklichen Voraussetzung, dass der Körper für den sie gelten sollte, magnetisch weich sei. Denn nur in einem solchen Körper bildet der Leitungsstrom $\mathfrak{i}$, bezw. der wahre Strom $\mathfrak{c}$ die einzige Veranlassung für einen Wirbel in der Vertheilung der Kraft $\mathfrak{H}$. Nachdem wir, um den durch die magnetische Härte bedingten Wirbeln von $\mathfrak{H}$ Rechnung zu tragen, die eingeprägten Kräfte $\mathfrak{H}_i$ einführten, können wir die frühere Betrachtung nun auch auf die magnetisch harten Körper ausdehnen, indem wir $\mathfrak{H}_i$ entsprechend in die Gleichung einführen. Gleichung (153) S. 158 geht hiermit über in (vgl. auch Gleichung 157)

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i) = 4\pi\mathfrak{c} = \left(4\pi k + K\frac{d}{dt}\right)\mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{u}\operatorname{div}\mathfrak{D} \quad (174)$$

Auch die Ableitung der zweiten Hauptgleichung (163) S. 171 beruhte auf der Voraussetzung, dass der curl der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}$ ausschliesslich durch den magnetischen Strom bedingt sei. Sie muss daher ebenfalls eine Abänderung erfahren für den Fall, dass eine der vorher aufgeführten eingeprägten Kräfte $\mathfrak{E}_c$, $\mathfrak{E}_t$, $\mathfrak{E}_h$, $\mathfrak{E}_i$ oder eine Summe mehrerer in solcher Vertheilung auftritt, dass der curl davon von Null verschieden ist. Nach den am Schlusse von § 55 durchgeführten Betrachtungen verstösst zwar eine solche Vertheilung zunächst gegen das Gesetz von der Erhaltung der Energie. Falls indessen mit der Bewegung der Hollundermarkkugel in dem dort erwähnten Canale, oder überhaupt mit einer elektrischen Strömung im Innern eines Körpers bei solcher Vertheilung der eingeprägten Kräfte ein besonderer Energieumsatz verbunden ist, auf den bei jener Betrachtung keine Rücksicht genommen war, so fällt damit das dort vorgebrachte Argument fort. Wir können daher sehr wohl und müssen sogar annehmen, dass die Kräfte $\mathfrak{E}_t$ und $\mathfrak{E}_h$ eine wirbelartige

Vertheilung besitzen, da mit ihrem Auftreten eine Energieumwandlung verbunden ist, die den durch die Linienintegrale dieser Kräfte für geschlossene Integrationswege dargestellten Arbeitsgrössen äquivalent ist. Auch bei einzelnen Bestandtheilen von $\mathfrak{E}_t$ könnte dies möglicherweise zutreffen.

Um dem Rechnung zu tragen, fassen wir die Summe aller eingeprägten Kräfte $\mathfrak{E}_c + \mathfrak{E}_t + \mathfrak{E}_h + \mathfrak{E}_t$ zu $\mathfrak{E}_e$ zusammen und geben dann der zweiten Hauptgleichung die Form

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = -\mathfrak{g} = -\dot{\mathfrak{B}} \quad . \quad . \quad . \quad (175)$$

Drittes Capitel.

Das Vectorpotential.

§ 83. Definition des Vectorpotentials.

Bei der Darstellung der Elektrodynamik nach der Hypothese der unvermittelten Fernwirkungen spielt das Potential der Ströme und der Magnete aufeinander, bezw. das damit im Zusammenhange stehende Vectorpotential die Hauptrolle. Auch Maxwell selbst hat es als einen der wichtigsten Hülfsbegriffe in seine Darstellung der Theorie übernommen. Erst durch die späteren Bearbeitungen des Maxwell'schen Schemas von O. Heaviside, Hertz und Cohn wurde die Bedeutung des Vectorpotentials für die Maxwell'sche Theorie vermindert. Es zeigte sich, dass die ganze Darstellung an Einheitlichkeit und unmittelbarer Anschaulichkeit erheblich gewann, sobald man die Formeln so umgestaltete, dass das Vectorpotential daraus eliminirt wurde.

Aus diesem Grunde habe ich in dem vorhergehenden Abschnitte die Einführung dieses Hülfsbegriffes völlig vermieden. Es würde aber einen nur schwer auszugleichenden Verlust für die ganze Theorie bedeuten, wenn man auf die Anwendung des Vectorpotentials ganz verzichten wollte. Für manche Betrachtungen und namentlich für die Lösung vieler

Aufgaben eignet es sich sehr gut, besonders in dem Sinne, dass es die Integrale der vorkommenden Differentialgleichungen zu finden lehrt. Dazu kommt noch, dass der überwiegende Theil aller übrigen Arbeiten über die Elektrodynamik und auch das Maxwell'sche Originalwerk für den mit dem Begriffe des Vectorpotentials nicht vertrauten Leser zunächst unverständlich bleiben würde.

Im ersten Abschnitte dieses Buches wurde das Potential einer scalaren Grösse eingeführt und die durch die Laplace'sche Gleichung ausgesprochene wichtigste Eigenschaft dieses Potentials abgeleitet. Verstehen wir unter ϱ eine stetig im Raume vertheilte scalare Grösse und setzen, so wie in § 36, von der anderweitigen Verfügung über den Factor 4π abgesehen,

$$V = \int \frac{\varrho\, dv}{r},$$

so genügt, wie aus Gleichung (111) S. 86 und (106) S. 82 hervorgeht, V der Laplace'schen Gleichung

$$\nabla^2 V = -4\pi\varrho.$$

Wir übertragen jetzt den Begriff des Potentials und den durch die letzte Gleichung ausgesprochenen Satz auf den Fall, dass an die Stelle des Scalars ϱ eine stetig im Raume vertheilte Vectorgrösse tritt. Von vornherein wollen wir hierzu die Intensität $\mathfrak{c}$ des wahren elektrischen Stromes wählen, obschon von jedem stetig im Raume vertheilten Vector im Allgemeinen dasselbe gilt.

Durch Definition setzen wir also fest, dass unter dem Vectorpotentiale $\mathfrak{A}$ eines vollständigen Systems elektrischer Ströme der Ausdruck

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{c}\, dv}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (176)$$

verstanden werden soll. Wie früher bedeutet dabei r den scalar aufgefassten Abstand zwischen dem Raumelemente dv und dem Punkte des Raumes, für den $\mathfrak{A}$ berechnet werden soll. Im Anschlusse an eine von Boltzmann eingeführte Bezeichnung wollen wir diesen Punkt in der Folge kurz den **Aufpunkt** nennen. Die durch das Integralzeichen vorgeschriebene Summirung ist über den ganzen Raum zu erstrecken, in dem $\mathfrak{c}$ vorkommt und bedeutet, da das Element unter dem Integralzeichen ein Vector ist, eine geometrische Summirung, die wieder zu einer Vectorgrösse führt, wie auch schon durch die Schreibweise von $\mathfrak{A}$ angedeutet ist.

Um Missverständnisse bei dem Verweise auf die im ersten Abschnitte entwickelten Rechengesetze zu vermeiden, bemerke ich noch, dass $\mathfrak{A}$ dort überall einen beliebigen Vector bedeutete (es war dort desshalb gewählt, weil $\mathfrak{A}$ als erster Buchstabe des Alphabets am nächsten lag), mit dem hier eingeführten $\mathfrak{A}$ also nicht verwechselt werden darf.

Die Wahl des Buchstabens $\mathfrak{A}$ für das Vectorpotential rührt von Maxwell selbst her. Allerdings ist der von ihm damit verbundene Begriff nicht völlig mit dem hier eingeführten identisch. Wenn Maxwell auch gelegentlich selbst in der Definition des Vectorpotentials etwas schwankte, so ist doch überwiegend bei ihm das μ-fache des durch Gleichung (176) angegebenen Werthes darunter zu verstehen. Bei allen Aufgaben, in denen die Permeabilität μ überall als constant zu betrachten ist, wie bei den von der Fernwirkungslehre gewöhnlich behandelten Problemen, macht dies zwar keinen Unterschied, wohl aber in allen anderen Fällen.

Nur schwer entschloss ich mich zu dieser Aenderung in der Definition von $\mathfrak{A}$. Ich hielt mich zuerst in einer zur Einführung des Lesers in die Maxwell'sche Theorie bestimmten Schrift nicht für berechtigt, von der herkömmlichen Definition dieses wichtigen Hülfsbegriffs abzuweichen und hatte desshalb das ganze vorliegende Capitel zunächst auf Grund der Maxwell'schen Definition von $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}_{\text{Maxwell}} = \mu \int \frac{\mathfrak{c}\, dv}{r} \quad \text{. . . . . .} \quad (176^a)$$

bearbeitet. Die Rücksicht auf die beträchtlich vereinfachte Darstellung im anderen Falle bewog mich aber schliesslich zu einer Neubearbeitung des Capitels auf Grund der vorher angegebenen Definition. Die Behandlung der Probleme, bei denen veränderliche Werthe von μ in Betracht kommen, wird dadurch ungemein erleichtert und zugleich die Analogie des Vectorpotentials mit dem scalaren Potential, die so viel zum Verständnisse der Sache beiträgt, viel klarer vor Augen geführt. Am Wesen der Sache selbst wird dadurch natürlich nichts geändert; man hat nur im Auge zu behalten, dass die hier gegebenen Werthe von $\mathfrak{A}$ nachträglich überall noch mit μ zu multipliciren sind, um das Maxwell'sche Vectorpotential zu erhalten. Ausserdem habe ich auch das Maxwell'sche Vectorpotential nach Gleichung (176ᵃ) bezw. in der etwas abgeänderten Definition von Gleichung (200) überall mit geführt. Eine sorgfältige Unterscheidung beider Werthe erwies sich dabei als unerlässlich und ich habe daher überall, wo ich $\mathfrak{A}$ in dem Sinne Maxwell's gebrauchte, dies durch die Schreibweise $\mathfrak{A}_{Maxw.}$ angegeben.

§ 84. Die Laplace'sche Gleichung für das Vectorpotential.

Ersetzen wir die Vectoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}$ durch ihre Componenten $A_1 A_2 A_3$ und $c_1 c_2 c_3$, so zerfällt Gleichung (176) in die 3 scalaren Gleichungen

$$A_1 = \int \frac{c_1\, dv}{r}, \quad A_2 = \int \frac{c_2\, dv}{r}, \quad A_3 = \int \frac{c_3\, dv}{r} \quad . \quad (177)$$

Die in irgend einer Richtung genommene Componente des Vectorpotentials bildet demnach das scalare Potential (oder das Potential im gewöhnlichen Sinne) der in derselben Richtung genommenen Stromcomponenten. In der That könnte z. B. A_1 als ein elektrostatisches Potential betrachtet werden, wenn man unter c_1 die Raumdichte einer elektrischen Massenvertheilung verstehen wollte. Daraus folgt ohne Weiteres, dass der durch die Laplace'sche Gleichung ausgesprochene Zusammenhang zwischen V und ϱ auch zwischen A_1 und c_1 u. s. f. besteht. Man hat also

$$\nabla^2 A_1 = -4\pi c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

nebst den zwei entsprechenden Gleichungen für die beiden anderen Achsenrichtungen. Multipliciren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ und addiren, so erhalten wir nach Gleichung (70) S. 58

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = -4\pi\mathfrak{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (179)$$

d. h. die Laplace'sche Gleichung gilt für das Vectorpotential elektrischer Ströme ebenso wie für das scalare Potential von Massen, die sich nach dem Coulomb'schen Gesetze abstossen.

§ 85. Die div des Vectorpotentials.

Durch Ausführung der Operation ∇ an dem scalaren Potentiale gelangt man nach Gleichung (104) S. 82 zur Kenntniss der in dem Felde auftretenden Kraft. Um den innigen Zusammenhang beider Arten von Potentialen zu erkennen, müssen wir jetzt untersuchen, welche Eigenschaften des Vectorpotentials dieser gegenüber zu stellen sind. Hierbei ist zu beachten, dass die Operation ∇ an dem Vector $\mathfrak{A}$ nach § 20 auf zwei verschiedene Arten ausgeführt werden kann und jenachdem die div oder den curl davon liefert. Zunächst bilden wir hier die div von $\mathfrak{A}$.

Bei dieser Ermittelung wollen wir aber von vornherein darauf Rücksicht nehmen, dass $\mathfrak{A}$ nicht das Potential eines beliebigen Vectors bedeutet, der nur stetig im Raume vertheilt zu sein braucht, sondern dass der Vector, von dem es genommen wird, die wahre elektrische Strömung $\mathfrak{c}$ ist, der ausserdem die besondere Eigenschaft der solenoidalen Vertheilung zukommt. Die Gleichung

$$\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0,$$

durch die dies ausgesprochen wird, bildet ja die fundamentale Voraussetzung der ganzen Maxwell'schen Theorie. Die besondere Bedingung, der $\mathfrak{c}$ unterworfen ist, führt auch zu besonderen Eigenschaften des Vectorpotentials elektrischer Ströme, die dem ganz allgemein aufgefassten Potentiale eines beliebigen Vectors nicht zukommen.

Zur Ausführung der Differential-Operation div unter dem Integralzeichen in Gleichung (176) sind wir berechtigt, falls in dem Ergebnisse die Umgebung des Aufpunktes nicht unendlich grösse Beiträge zu dem Integrale beisteuert. Es wird sich zeigen, dass dies nicht zutrifft, dass wir also die Operation in dieser Weise vollziehen können.

Bei der Bildung dieser div ist ferner zu beachten, dass dabei $\mathfrak{c}$ in Gleichung (176) als constant anzusehen ist, denn die Operation bezieht sich ja nur auf Veränderungen, die $\mathfrak{A}$ bei Verschiebungen des Aufpunktes erleidet. Auf der rechten Seite der Gleichung (176) ändert sich aber in diesem Falle nur die Entfernung r des Aufpunktes vom Volumenelemente dv Zerlegt man zur weiteren Ausführung der Operation $\mathfrak{c}$ in seine 3 Componenten und zieht nachträglich wieder zusammen, oder bezieht man sich dabei, was noch einfacher ist, auf Gleichung (78) S. 61, so erhält man nun leicht

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \int \mathfrak{c} \cdot \nabla \frac{1}{r} dv.$$

Dass die Umgebung des Aufpunktes nur unendlich kleine Beiträge zu dem Raumintegrale liefert, dass wir also zur Ausführung der Operation unter dem Integralzeichen berechtigt waren, ergibt sich nun leicht aus der folgenden Hülfsbetrachtung.

Die Operation ∇ an $1/r$ führten wir schon in § 36 aus; sie führte zu $-\mathfrak{r}/r^3$, wenn $\mathfrak{r}$ den Radiusvector vom Volumenelemente zu dem Aufpunkte, oder zu $\mathfrak{r}'/r^3$, wenn $\mathfrak{r}' = -\mathfrak{r}$ den entgegengesetzt gerichteten Radiusvektor mit dem Tensor r bedeutet. Aus der Umgebung des Aufpunktes grenzen wir durch eine Kegelfläche mit der unendlich kleinen Oeffnung $\tilde{\omega}$ einen Raumtheil ab, den wir weiter in Raumelemente zerlegen, so dass ein solches Element das Volumen $\tilde{\omega} r^2 dr$ erhält. Für alle in dem Kegelraume liegenden Elemente hat $\mathfrak{r}'/r$ denselben Werth; es bedeutet einen in der Richtung von $\mathfrak{r}'$ (der Kegelachse) gezogenen Einheitsvector und $\mathfrak{c}\mathfrak{r}'/r$ ist die Projection von $\mathfrak{c}$ auf die Kegelachse. Der Beitrag des betrachteten Raumelements zu dem oben stehenden Raumintegrale ergibt sich demnach zu

$$\tilde{\omega} d r \cdot \frac{\mathfrak{c} r'}{r},$$

ist also in der That (solange nicht $\mathfrak{c}$ selbst unendlich gross wird, was selbstverständlich auszuschliessen ist) unendlich klein von der Ordnung $\bar{\omega} dr$, wenn auch r bis auf Null abnimmt. Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen und unser Verfahren gerechtfertigt.

Wie sich aus den vorhergehenden Bemerkungen ferner noch ergibt, kann man dem Werthe $\nabla(1/r)$ zwei verschiedene Bedeutungen unterlegen, je nachdem der eine oder der andere Endpunkt von r dabei als variabel angesehen wird, d. h. je nach der Richtung von $\mathfrak{r}$ bezw. $\mathfrak{r}'$; beide Werthe unterscheiden sich indessen nur durch das Vorzeichen von einander. — Nach dem Gange der Entwickelung war in der Gleichung für div $\mathfrak{A}$ die Operation $\nabla(1/r)$ auf Verschiebungen des Aufpunktes zu beziehen. Wir können und wollen uns aber nun anstatt dessen ∇ so ausgeführt denken, dass wir es auf Verschiebungen des Raumelementes dv beziehen. Schreiben wir zur Unterscheidung von der vorigen Gleichung in diesem Falle $-\nabla'$ für ∇, so wird

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -\int \mathfrak{c} \nabla'\left(\frac{1}{r}\right) dv.$$

Auch bei diesen Verschiebungen ist natürlich $\mathfrak{c}$ immer noch als constant zu betrachten. In der That kommt der ganze Uebergang aus der einen Form der Gleichung in die andere nur darauf hinaus, dass wir, anstatt die Lage des Aufpunktes einer Variation zu unterwerfen, dem ganzen stromführenden Systeme eine Translation in der entgegengesetzten Richtung ertheilen. Die relative Lagenänderung, auf die es allein ankommt, bleibt in beiden Fällen dieselbe.

Nach dem schon oben angezogenen Rechengesetze Gleichung (78), ist aber allgemein

$$\mathfrak{c} \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \operatorname{div} \frac{\mathfrak{c}}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{c},$$

wobei die Operationen ∇ und div sich ebenso wie vorher ∇' auf Verschiebungen des Punktes beziehen, zu dem $\mathfrak{c}$ gehört und wobei nun auf der rechten Seite $\mathfrak{c}$ selbst als mit den zugehörigen Verschiebungen des Punktes veränderlich anzusehen ist. Führen wir dies in die vorige Gleichung ein, so erhalten wir

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \int \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{c}\, dv - \int \operatorname{div} \frac{\mathfrak{c}}{r}\, dv \quad . \quad . \quad . \quad (180)$$

In dem besonderen Falle des Vectorpotentials wahrer elektrischer Ströme ist aber, wie schon bemerkt, $\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0$, so dass das erste Glied des gefundenen Ausdrucks ohne Weiteres gestrichen werden kann. Vom zweiten Gliede gilt zunächst wieder, wie sich dies auf dem vorhin erörterten Wege nachweisen lässt, dass die Umgebung des Aufpunktes keine unendlich grossen Beiträge zu dem Integrale liefert. Ferner lässt es sich mit Hülfe von Gleichung (101) S. 77 in ein Oberflächenintegral umwandeln, so dass

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{c}}{r} \mathfrak{N}_1 df$$

gefunden wird.

Unter df ist das Element einer den ganzen betrachteten Raum einschliessenden Fläche zu verstehen. Schon bei der Aufstellung der Definitionsgleichung von $\mathfrak{A}$ war aber festgesetzt worden, dass alle Theile des Raumes in Betracht zu ziehen sind, in denen $\mathfrak{c}$ überhaupt vorkommt. An der diesen Raum umschliessenden Fläche ist daher $\mathfrak{c}$ jedenfalls überall gleich Null und wir gelangen damit zu dem Endresultate

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

Das von einem vollständigen Systeme wahrer elektrischer Ströme genommene Vectorpotential erfüllt demnach überall im Raume, wie diese Ströme selbst, die solenoidale Bedingung.

Liesse man dagegen die beschränkende Voraussetzung fallen, dass das Potential von einem Vector genommen werden soll, der selbst die solenoidale Bedingung erfüllt, so würde div $\mathfrak{A}$ durch das erste Glied der rechten Seite von Gleichung (180) dargestellt werden, d. h. div $\mathfrak{A}$ wäre das scalare Potential der div des Vectors, dessen Vectorpotential $\mathfrak{A}$ ist.

§ 86. Der curl des Vectorpotentials.

Die unmittelbare Ausführung der Operation curl an Gleichung (176) liefert Folgendes. Zunächst wird aus dem curl von $\mathfrak{c}/r$, falls $\mathfrak{c}$ constant ist, wie entweder aus Gleichung (80) S. 61 geschlossen oder auch durch directe Zerlegung in die Componenten leicht gefunden wird,

$$\mathrm{curl}_r\left(\frac{\mathfrak{c}}{r}\right) = V\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\mathfrak{c}.$$

Beziehen wir die Operation ∇ auf Verschiebungen des zu dv gehörigen Endpunktes von r, so ist, wie im vorigen § das Vorzeichen zu wechseln und man erhält

$$\mathrm{curl}\,\mathfrak{A} = \int V\mathfrak{c}\left(\nabla\frac{1}{r}\right)dv = -\int\frac{1}{r^3}V\mathfrak{c}\mathfrak{r}\,dv\,. \quad . \quad (182)$$

Wegen der Entwickelung von $\nabla(1/r)$ und des Nachweises, dass die Ausführung der Differentialoperation curl unter dem Integralzeichen zulässig war, verweise ich auf die entsprechenden Bemerkungen im vorigen §, die auf den vorliegenden Fall leicht zu übertragen sind; unter $\mathfrak{r}$ ist in Gleichung (182) jetzt der vom Aufpunkte nach dem Raumelemente dv hingehende Radiusvector zu verstehen.

Der Werth von curl $\mathfrak{A}$ lässt sich aber auch noch durch eine zweite von dieser ganz unabhängige Entwickelung ermitteln. Der Vergleich der beiden Ergebnisse wird uns dann zu wichtigen Folgerungen führen.

Nach Gleichung (72) S. 59 ist nämlich allgemein

$$\mathrm{curl}^2\,\mathfrak{A} = \nabla\cdot\mathrm{div}\,\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A}\,.$$

In unserem Falle ist aber $\mathfrak{A}$, wie durch Gleichung (181) ausgesprochen wird, solenoidal vertheilt, so dass hier speciell

$$\mathrm{curl}^2\,\mathfrak{A} = -\nabla^2\mathfrak{A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (183)$$

zu setzen ist. Für $\nabla^2\mathfrak{A}$ haben wir aber schon nach der Laplace'schen Gleichung einen Werth gefunden, den wir hier einsetzen können, so dass

$$\mathrm{curl}^2\,\mathfrak{A} = 4\pi\mathfrak{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (184)$$

wird. — Es handelt sich jetzt darum, diese Gleichung zu integriren, um curl $\mathfrak{A}$ daraus abzuleiten. Dazu verhilft uns die zweite Hauptgleichung. Nehmen wir zunächst an, dass in der unmittelbaren Umgebung des Aufpunktes keine eingeprägten magnetischen Kräfte $\mathfrak{H}_i$ vorkommen, so wird diese durch Gleichung (153) S. 158 dargestellt. Wir erhalten also auch

$$\mathrm{curl}^2\,\mathfrak{A} = \mathrm{curl}\,\mathfrak{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (185)$$

Die Integration liefert uns

$$\mathrm{curl}\,\mathfrak{A} = \mathfrak{H} + \nabla\Psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186)$$

Das mit $\nabla\Psi$ bezeichnete Glied spielt hier die Rolle einer Integrationsconstanten; es ist indessen keine wirkliche Constante, sondern eine noch näher zu bestimmende Grösse, von der wir zunächst nur wissen, dass sie einen Vector bedeutet, dessen curl gleich Null ist. Ein solcher Vector lässt sich aber (vgl. Gl. 104 S. 82) aus einem scalaren Potentiale Ψ ableiten, wesshalb die Schreibweise $\nabla\Psi$ in Gleichung (186) von vornherein gewählt werden konnte.

Eine weitere Eigenschaft des Vectors $\nabla\Psi$ ergibt sich, wenn wir Gleichung (186) der Operation div unterwerfen. Nach Gleichung (71) S. 58 verschwindet dann der Werth auf der linken Seite und man erhält mit fernerer Berücksichtigung von Gleichung (68)

$$\mathrm{div}\,\nabla\Psi = \nabla^2\Psi = -\,\mathrm{div}\,\mathfrak{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187)$$

Nun ist stets div $\mathfrak{B} = 0$ und daher überall wo μ constant ist, auch div $\mathfrak{H} = 0$. In allen solchen Gebietstheilen verschwindet daher $\nabla^2\Psi$. Trifft dies im ganzen Raume zu, so wird Ψ zu einer Constanten und das Glied $\nabla\Psi$ fällt aus Gleichung (186) fort. Wir kommen damit auf den von der Elektrodynamik nach der Fernwirkungslehre mit Vorliebe, ja fast ausschliesslich behandelten Fall, dass Ströme auf einander wirken, ohne dass Eisenmassen (bezw. Kobalt oder Nickel) ins Spiel kommen. In diesem Falle ist also

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{curl}\,\mathfrak{A} &= \mathfrak{H} \\ \mathfrak{B} = \mu\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A} &= \mathrm{curl}\,\mathfrak{A}_{\mathrm{Maxw.}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188)$$

Die letzte Gleichung gibt an, wie sich diese Beziehung gestaltet, wenn man die in § 83 besprochene ursprüngliche Definition des Vectorpotentials (mit $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ bezeichnet) zu Grunde legt.

Dort, wo div $\mathfrak{H}$ nicht gleich Null ist, also an den Grenzschichten zwischen Eisenmassen und Luft oder auch im Innern von Eisenmassen mit wechselnder Permeabilität kann man nach § 53 dafür setzen

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 4\pi\sigma_f,$$

worin σ_f die Raumdichte freier magnetischer Massen bedeutet. Setzt man dies in Gleichung (187) ein, so erhält man

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi\sigma_f \quad \ldots\ldots \quad (189)$$

Das ist aber die Laplace'sche Gleichung, die von dem scalaren Potentiale der freien magnetischen Massen erfüllt wird. Von einer Constanten, auf die es nicht ankommt abgesehen, lässt sich daher Ψ darstellen durch

$$\Psi = \int \frac{\sigma_f dv}{r} \quad \ldots\ldots \quad (190)$$

Das Glied $\nabla \Psi$ in (186), auf dessen nähere Ermittelung es ankam, ist hiermit vollständig bestimmt. Nach Gleichung (104) in Verbindung mit dem für Ψ hier gefundenem Werthe stellt nämlich $-\nabla \Psi$ die von den freien magnetischen Massen (wenn wir diese, an die Begriffe der Fernwirkungslehre anknüpfende Auffassung für den Zweck der Beschreibung der Erscheinungen zulassen wollen) herrührende magnetische Kraft dar. Bezeichnen wir diese für den Augenblick mit $\mathfrak{H}_m$, so lässt sich Gleichung (186) auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_m + \operatorname{curl} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_m + \mu \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{B}_m + \operatorname{curl} \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \end{aligned}\right\} \quad (191)$$

Der ganze Kraftfluss und der ganze Inductionsfluss werden dadurch in zwei Theile geschieden, von denen der eine unmittelbar von den elektrischen Strömen herrührt und bei allen Aufgaben, bei denen kein Eisen dazwischen kommt, allein besteht, während der andere durch die Dazwischenkunft des Eisens bedingt ist und das von den magnetischen Massen ausgehende Feld darstellt. Die Gleichungen (188) geben nur den speciellen Fall der Gleichungen (191) an, in dem $\mathfrak{H}_m$ und $\mathfrak{B}_m$ verschwinden.

Durch diese Gleichungen findet die im Eingange von § 85 aufgeworfene Frage ihre Beantwortung. So wie die Operation ∇ an einem scalaren Potentiale zu der im Felde auftretenden Kraft führt, erhalten wir durch dieselbe Operation, wenn wir sie an dem Vectorpotentiale elektrischer Ströme nach Vectorart ausführen (d. h. den curl nehmen), die von den elektrischen Strömen unmittelbar (also ohne die Dazwischenkunft freier Magnetismen) herrührende magnetische Kraft.

Die damit hervorgehobene wichtige Analogie zwischen den beiden Arten von Potentialen wird nur dadurch etwas gestört, dass in Gleichung (104), die als das Analogon von Gleichung $(191)_1$ zu gelten hat, ein Minuszeichen vorkommt, das in dieser fehlt. — Dass die Ausführung der Operation ∇ an dem Vectorpotentiale nach scalarer Art, also die Operation div, zu Null führt, ergab sich, woran in diesem Zusammenhange nochmals erinnert werden soll, schon in § 85.

§ 87. Berücksichtigung der eingeprägten Kräfte.

Die vorigen Betrachtungen werden nur dann ungenau, wenn der Aufpunkt selbst im Innern eines magnetisch harten Körpers liegt. Dass im Felde überhaupt magnetisch harte Körper und in diesen eingeprägte magnetische Kräfte vorkommen, hindert nämlich die Anwendbarkeit der vorhergehenden Schlüsse nicht, falls nur der Aufpunkt selbst an einer Stelle des Feldes liegt, an der keine eingeprägten Kräfte auftreten. Wir wollen jetzt sehen, welche Aenderungen unsere Gleichungen im anderen Falle erfahren.

Die erste Hauptgleichung wird dann durch Gleichung (174) S. 213 dargestellt. Setzen wir sie bei der im vorigen § durchgeführten Betrachtung in Gleichung (184) ein, so geht diese über in

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{A} = \operatorname{curl}(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i).$$

Durch Integration findet man daraus wie vorher

$$\operatorname{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i + \nabla \Psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (192)$$

wo aber jetzt an Stelle von Gleichung (187)

$$\nabla^2 \Psi = \operatorname{div} \mathfrak{H}_i - \operatorname{div} \mathfrak{H} = \operatorname{div} \mathfrak{H}_i - 4\pi\sigma_f$$

tritt. Zerlegen wir nun $\mathfrak{H}$ überall in die Bestandtheile

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_m + \mathfrak{H}_i + \mathfrak{H}_e,$$

wo $\mathfrak{H}_e$ die von elektrischen Strömen unmittelbar herrührende Kraft bedeutet und rechnen zu $\mathfrak{H}_m$, wie seither, jenen Theil von $\mathfrak{H}$, der zur Vertheilung freier magnetischer Massen gehört, so folgt $\operatorname{div} \mathfrak{H} = \operatorname{div} \mathfrak{H}_m$ und daher

$$\operatorname{div} \mathfrak{H}_i = 0.$$

Die eingeprägte Kraft $\mathfrak{H}_i$ ist daher überall solenoidal vertheilt. Demnach stellt $-\nabla \Psi$ in Gleichung (192) wie vorher die magnetische Kraft $\mathfrak{H}_m$ dar. Diese Gleichung geht also über in

$$\operatorname{curl} \mathfrak{A} = \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i - \mathfrak{H}_m.$$

Setzt man noch $\mathfrak{H}_i = \operatorname{curl} \mathfrak{A}_i$, wozu wir berechtigt sind, da $\operatorname{div} \mathfrak{H}_i$ Null war, so folgt

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_i) = \mathfrak{H} - \mathfrak{H}_m,$$

d. h. die Gleichungen (191) bleiben auch im Innern magnetisch harter Körper noch gültig, falls man unter $\mathfrak{A}$ das Vectorpotential $\mathfrak{A}_i$ mit einrechnet, aus dem sich die eingeprägten Kräfte $\mathfrak{H}_i$ ableiten lassen. Ueberall ausserhalb der magnetisch harten Körper fällt das Glied $\mathfrak{A}_i$ aus der Gleichung heraus, da sein curl dort verschwindet.

§ 88. Darstellung von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ durch Raumintegrale.

In § 86 gelangten wir auf zwei verschiedenen Wegen zu zwei Werthen von gleichfalls ganz verschiedener Form für den curl des Vectorpotentials. Der Vergleich beider liefert uns eine Darstellung der magnetischen Kraft und der magnetischen Induction in der Form eines Raumintegrales. Aus Gleichung (182) und Gleichung (191) erhalten wir in der That unmittelbar

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_m - \int \frac{1}{r^3} \mathbf{V}\, \mathfrak{c}\mathfrak{r}\, dv \\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_m - \mu \int \frac{1}{r^3} \mathbf{V}\, \mathfrak{c}\mathfrak{r}\, dv\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (193)$$

Von der veränderten Bezeichnungsweise abgesehen, ist die erste dieser Formeln genau der von der Fernwirkungslehre auf Grund des Biot-Savart'schen Gesetzes aufgestellte Ausdruck über die von elektrischen Strömen im Vereine mit Magneten (von denen das Glied $\mathfrak{H}_m$ herrührt) ausgehenden magnetischen Kräfte. Indessen ist daraus keineswegs zu schliessen, dass die Maxwell'sche Theorie zu dem genannten Elementargesetze führe, denn aus Gleichung (193) folgt noch nicht, dass bei einer Zerlegung von $\mathfrak{B}$ in ebensoviele Elemente als Raumelemente dv vorkommen, nun auch das Element des Integrals das von dem betreffenden Raumelemente herrührende Element von $\mathfrak{B}$ richtig wiedergebe. Die Gültigkeit der Gleichung ist vielmehr hier nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung bewiesen, dass die Integration über den ganzen Raum ausgedehnt wird, in dem elektrische Ströme vorkommen. Auf Bruchtheile dieses Raumes und speciell auf einzelne Raum- oder Stromelemente kann sie daher nicht angewendet werden. — Ein solches Elementargesetz wie das Biot-Savart'sche hat übrigens in der Maxwell'schen Theorie überhaupt keinen Platz. Nach ihr sind ungeschlossene Stromelemente physikalisch nicht möglich, daher fehlt auch dem Begriffe der von einem solchen Stromelemente ausgehenden magnetischen Kraft jede physikalische Bedeutung. Jede Zerlegung der Gesammtwirkung auf die einzelnen Elemente ist dadurch von vornherein als ein Act der Willkür gekennzeichnet, der weder bestätigt, noch durch die Erfahrung widerlegt werden kann, da er einen Fall setzt, der an sich ausgeschlossen ist.

Aus der ersten Hauptgleichung folgte schon, dass der curl von $\mathfrak{H}$, falls der Aufpunkt frei von eingeprägten Kräften ist, wieder zu $4\pi\mathfrak{c}$ führt. Wenn man versucht, dieses Resultat aus Gleichung (193) durch Ausführung des curl unter dem Integralzeichen abzuleiten, wird man daran dadurch gehindert, dass die Elemente des Integrals in der unmittelbaren Nachbarschaft des Aufpunktes unendlich grosse Werthe annehmen. Im Gegensatze zu dem in § 85 bei Untersuchung der Frage, ob dort die Ausführung der Operation div unter dem Integralzeichen zulässig sei, gefundenen Sachverhalte, würden wir bei der Wiederholung dieser Untersuchung für den jetzt vorliegenden Fall finden, dass unendlich kleine Bezirke in der Nähe des Aufpunktes endliche Beiträge zu dem betreffenden Integrale lieferten, so dass die Ermittelung des wahren Werthes von curl $\mathfrak{H}$ auf diesem Wege — wenigstens nicht ohne eine sorgfältige gesonderte Untersuchung dieser Verhältnisse — nicht möglich ist.

§ 89. Vectorpotential von Magneten.

Die Gleichungen (191), die für den Fall, dass keine Magnete (d. h. hier magnetisch weiche oder harte Körper, deren Permeabilität von der der Luft merklich verschieden ist) vorkommen, durch die einfacher gestalteten Gleichungen (188) ersetzt werden, lassen sich noch so umformen, dass sie sich auch in anderen Fällen der Form nach vollständig mit diesen decken. Dazu ist nur nöthig, dass wir dem Symbole $\mathfrak{A}$ in den Gleichungen (188) eine etwas erweiterte Bedeutung beilegen. Hierdurch werden wir auf den Begriff des Vectorpotentials von Magneten geführt.

Beschränken wir uns nämlich zunächst auf die Betrachtung solcher Raumtheile, in denen μ constant ist, während wir ausserhalb dieser Gebietstheile μ als veränderlich ansehen, so lässt sich die in Gleichung (186) als Integrationsconstante eingeführte und später in Gleichung (191) als die von freien Magnetismen ausgehende magnetische Kraft $\mathfrak{H}_m$ erkannte

Grösse $-\nabla\Psi$ nicht nur, wie es bisher besprochen war, von einem scalaren Potentiale, sondern ausserdem auch von dem Potentiale eines (vorläufig noch unbekannten) Vectors ableiten. Wir nennen diesen $\mathfrak{A}_m$ und setzen

$$\mathfrak{H}_m = -\nabla\Psi = \operatorname{curl}\mathfrak{A}_m \quad \ldots \quad (194)$$

Die Bedingung dafür, dass dies zulässig ist, besteht nach Gleichung (71) S. 58 darin, dass $\operatorname{div}\mathfrak{H}_m$ oder $\nabla^2\Psi$ Null ist. In dem Raume, den wir uns jetzt zur Betrachtung ausgewählt haben, trifft dies aber nach den auf Gleichung (187) folgenden Bemerkungen zu. Führen wir den Werth von $\mathfrak{H}_m$ in Gleichung (191) ein und bezeichnen wir zum Unterschiede von $\mathfrak{A}_m$ das von den elektrischen Strömen $\mathfrak{c}$ herrührende Vectorpotential mit $\mathfrak{A}_e$, die Summe beider aber mit $\mathfrak{A}$, so ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \operatorname{curl}\mathfrak{A}_m + \operatorname{curl}\mathfrak{A}_e = \operatorname{curl}(\mathfrak{A}_m + \mathfrak{A}_e) = \operatorname{curl}\mathfrak{A} \\ \mathfrak{B} &= \mu\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \operatorname{curl}\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \end{aligned}\right\} (195)$$

Das Glied $\mathfrak{A}_i$, von dem in § 87 die Rede war, verschwindet in dem Raume, den wir betrachten, ohnehin.

Der Vector $\mathfrak{A}_m$ heisst das von der Anwesenheit der Magnete herrührende Vectorpotential, obschon er vorläufig noch nicht in jener analytischen Form dargestellt ist, die der Definition des Vectorpotentials in § 83 zu Grunde gelegt wurde. Wir kennen bisher überhaupt noch nicht jenen Vector, als dessen Potential $\mathfrak{A}_m$ aufgefasst werden könnte und werden ihn jetzt erst zu bestimmen suchen.

Dieser Bestimmung stellt sich die Schwierigkeit entgegen, dass die Gleichungen (194) und (195) nicht für den ganzen Raum, sondern nur in den vorher näher bezeichneten Gebietstheilen gültig sind.

§ 90. **Directe Bestimmung von $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$**

Aus dem soeben angeführten Grunde fassen wir die Aufgabe jetzt etwas anders an und bestimmen unmittelbar den Vector $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ aus der Gleichung

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl}\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \quad \ldots \quad (196)$$

die nach Gleichung (195) zunächst überall dort gilt, wo μ constant ist. In dieser Form lässt sich die Gültigkeit der Gleichung aber auf den ganzen Raum ausdehnen, da nach den Grundlagen der Theorie wahrer Magnetismus nirgends vorkommt, d. h. div $\mathfrak{B}$ überall Null ist und weil daher die Bedingung dafür, dass $\mathfrak{B}$ als curl eines anderen, noch näher zu bestimmenden Vectors $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ angesehen werden kann, überall zutrifft. Von $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ selbst wissen wir zunächst nur dies, dass es mit dem in Gleichung (176ᵃ) definirten Werthe zusammenfällt, so lange keine Magnete in dem Probleme auftreten. Jetzt aber, wo wir die Anwesenheit von Magneten voraussetzen und Gleichung (196) auch selbst auf die Grenzschichten zwischen Eisen und Luft u. s. w. angewendet werden soll, haben wir es ganz von Neuem zu bestimmen.

In unserem gegenwärtigen Falle hat daher $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ nur die eine Bedeutung einer Stammgrösse, aus der sich durch Ausführung der Operation curl die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ überall im Felde ableiten lässt, d. h. $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ wird durch Gleichung (196) selbst definirt und ist vorläufig keinen weiteren Beschränkungen unterworfen.

Gleichung (196) ist aber eine Differentialgleichung, aus der $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$, wenn $\mathfrak{B}$ im ganzen Raume gegeben ist, durch eine Integration hervorgeht. Daraus folgt, dass es durch Gleichung (196) noch nicht vollständig definirt ist, indem bei der Integration noch eine willkürliche Grösse hinzukommen kann, die sich aus der Gleichung (196) wieder forthebt. Denken wir uns irgend eine Lösung $\mathfrak{A}$ der Gleichung (196) gefunden und fügen wir ihr einen Vector $\mathfrak{K}$ hinzu, so wird $\mathfrak{A} + \mathfrak{K}$ auch eine Lösung der Gleichung sein, falls nur überall curl $\mathfrak{K} = 0$ ist. Sonst ist der hinzuzufügende Vector $\mathfrak{K}$ keiner Beschränkung unterworfen; wir können ihn daher überall so wählen, dass seine div überall das Entgegengesetzte der div der ersten Lösung $\mathfrak{A}$ und daher die div der neuen Lösung $(\mathfrak{A} + \mathfrak{K})$ überall Null ist.

Die in dieser Weise specialisirte Lösung $(\mathfrak{A} + \mathfrak{K})$, oder, wie wir jetzt wieder dafür schreiben, $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$, der Gleichung (196) wollen wir wählen und wir müssen auch gerade diese wählen, wenn wir erreichen wollen, dass für den schon früher behandelten Fall des Fehlens von Magneten im Felde die gefundene Lösung sich mit der für diesen Fall gegebenen Definition von $\mathfrak{A}_{Maxw.}$ deckt.

Nach diesen Festsetzungen ist also überall im Raume

$$\operatorname{div} \mathfrak{A}_{Maxw.} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

Nach Gleichung (72) S. 59 ist daher hier

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{A}_{Maxw.} = - \nabla^2 \mathfrak{A}_{Maxw.}$$

mit Berücksichtigung von Gleichung (196) also auch

$$\nabla^2 \mathfrak{A}_{Maxw.} = - \operatorname{curl} \mathfrak{B}.$$

Setzen wir hier für $\mathfrak{B}$ den Werth $\mu \mathfrak{H}$ und führen die Operation nach Gleichung (80) S. 61 aus, so erhalten wir

$$\nabla^2 \mathfrak{A}_{Maxw.} = - \mu \operatorname{curl} \mathfrak{H} - \mathrm{V} (\nabla \mu) \cdot \mathfrak{H}.$$

In diese Gleichung können wir nun ferner noch den Werth von $\operatorname{curl} \mathfrak{H}$ aus der ersten Hauptgleichung einführen und zwar müssen wir hierbei, da die Gleichung im ganzen Raume gültig bleiben soll und in diesem auch magnetisch harte Körper vorkommen sollen (oder doch vorkommen können), von vornherein auch auf die eingeprägten magnetischen Kräfte Rücksicht nehmen, die erste Hauptgleichung also in der Form (174) S. 213 anwenden. Wir erhalten so

$$\nabla^2 \mathfrak{A}_{Maxw.} = - 4\pi\mu \mathfrak{c} - \mu \operatorname{curl} \mathfrak{H}_i - \mathrm{V} (\nabla \mu) \cdot \mathfrak{H} \quad (198)$$

Der Vergleich mit der Laplace'schen Gleichung (179) S. 218 zeigt uns, dass damit der Vector gefunden ist, als dessen Potential $\mathfrak{A}_{Maxw.}$ zu betrachten ist. Setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{c} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{H}_i + \frac{1}{4\pi\mu} \mathrm{V} (\nabla \mu) \mathfrak{H} \quad . \quad . \quad (199)$$

so ist

$$\mathfrak{A}_{Maxw.} = \int \frac{\mu \mathfrak{k} \, dv}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (200)$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst ist. Für den Fall, dass überall μ constant und $\mathfrak{H}_i$ gleich Null ist, geht dieser Werth in den durch die Definitionsgleichung (176[a]) gegebenen über. Wohl zu beachten ist indessen, dass die Permeabilität μ in Gleichung (200) unter das Integralzeichen und nicht, wie dies bei der ursprünglichen Definition von Maxwell zutraf, vor das Integralzeichen zu setzen ist.

Die auf der rechten Seite von Gleichung (199) auf $\mathfrak{c}$ folgenden beiden Glieder haben dieselbe Dimension wie elektrische Strömungen und können daher durch fingirte Ströme ersetzt werden. Es könnte daher scheinen, als wenn dies die Ströme wären, die von Ampère zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen benutzt wurden. Hier drängt sich indessen eine wichtige Bemerkung auf. Bilden wir nämlich von dem durch Gleichung (199) gegebenen Werthe von $\mathfrak{f}$ die div, so finden wir, dass sie nicht überall im Raume verschwindet. Nach dem Grundsatze der solenoidalen Vertheilung der wahren elektrischen Ströme (der übrigens für stationäre Ströme, wie sie hier in Betracht kommen, eine selbstverständliche Forderung jeder Theorie und nicht nur der Maxwell'schen bildet), trägt zwar das erste Glied nichts zu dieser div bei und ebensowenig das zweite, wie aus Gleichung (71) hervorgeht. Die div des dritten Gliedes verschwindet aber im Allgemeinen nur dort, wo μ constant ist. Nach den Rechengesetzen der Gleichungen (78) und (81) lässt sich dies leicht weiter ausführen. Nach einigen Umformungen erhält man

$$\operatorname{div} \mathfrak{f} = \frac{1}{4\pi} \nabla \frac{1}{\mu} \cdot \{\mu \operatorname{curl} \mathfrak{H} + V(\nabla \mu) \cdot \mathfrak{H}\} = \frac{1}{4\pi} \nabla \frac{1}{\mu} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{B} \quad (201)$$

Damit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen. Anders ist es mit der div von $\mu \mathfrak{f}$, also jenes Vectors, dessen Potential nach Gleichung (200) durch $\mathfrak{A}_{Maxw.}$ angegeben wird. Sie wird, wie man sich leicht überzeugt, in der That zu Null, d. h. der Vector $\mu \mathfrak{f}$, der aber nicht als ein elektrischer Strom aufgefasst werden darf, da er von ganz anderer Dimension ist, also eine physikalisch von einem solchen durchaus verschiedene Grösse darstellt, erfüllt an Stelle des zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen etwa zu fingirenden Stromes die solenoidale Bedingung.

Das Ergebniss dieser für die Theorie des Magnetismus überaus wichtigen Betrachtung besteht demnach darin, dass man zwar ein System elektrischer Strömungen angeben kann, das nach Multiplication mit der Permeabilität μ einen Vector liefert, aus dessen Potential, ohne dass man daneben das Vorhandensein magnetischer Massen anzunehmen brauchte, sich dieselbe Vertheilung des Kraft- und Inductionsflusses ableiten lässt, wie sie sich sonst bei Berücksichtigung dieser Massen ergibt, dass aber zweitens die zu diesem Zwecke zu fingirenden elektrischen Ströme nicht überall solenoidal vertheilt sind. Die Hypothese, dass diese elektrischen Ströme physikalisch existirten und dass die etwa bei Stahlmagneten beobachteten magnetischen Wirkungen von ihnen wirklich hervorgerufen wären, oder mit anderen Worten, dass jene magnetischen Kräfte in Wahrheit von molekularen Strömen ausgehende elektrodynamische Kräfte wären, lässt sich daher nicht aufrecht erhalten. Dies wird sich auch aus den folgenden Untersuchungen noch weiter ergeben.

§ 91. Darstellung von $\mathfrak{H}_e$ als Vectorpotential.

Unter $\mathfrak{H}_e$ sei jetzt, wie schon in § 87, jene magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ verstanden, die von elektrischen Strömen ohne Dazwischenkunft magnetischer Massen ausgeht. Es ist also jener Theil von $\mathfrak{H}$, der in Gleichung (193) durch das zweite Glied in Form eines Raumintegrales dargestellt wurde und es wird mit dem ganzen $\mathfrak{H}$ identisch, wenn in dem ganzen betrachteten Raume μ constant ist und keine eingeprägten magnetischen Kräfte vorkommen.

Für $\mathfrak{H}_e$ lässt sich ausser jenem analytischen Ausdrucke noch ein anderer aufstellen, der sich für die Zwecke mancher Untersuchungen besser eignet, weil er selbst die Form eines Vectorpotentials annimmt, auf das die Laplace'sche Gleichung angewendet werden kann. Der Vector, als dessen Potential $\mathfrak{H}_e$ angesehen werden kann, hat bisher keinen besonderen

Namen erhalten, obschon er wegen des Nutzens, den seine Einführung der Theorie leistet, wohl einen solchen verdiente; es ist der curl des wahren elektrischen Stromes $\mathfrak{c}$.

Zur Ableitung jenes Ausdrucks entwickle ich zuvor einen allgemein gültigen Satz der Potentialtheorie, dessen Anwendung uns dann sofort zum Ziele führen wird. Zunächst greife ich auf Gleichung (176) zurück, durch die das Vectorpotential $\mathfrak{A}$ definirt wurde

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{c}\,dv}{r}.$$

Zur Abkürzung sei, indem ich hierin ebenso wie in der ganzen Ableitung des Satzes Heaviside folge, hierfür in den folgenden Betrachtungen

$$\mathfrak{A} = \operatorname{pot}\mathfrak{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (202)$$

geschrieben, wodurch das Operationszeichen pot seine Definition erhält.

Unter der Voraussetzung, dass der Vector $\mathfrak{c}$, worunter jetzt ein im Uebrigen beliebiger, aber stetig im Raume vertheilter Vector verstanden werden kann, die solenoidale Bedingung $\operatorname{div}\mathfrak{c} = 0$ erfüllt, ist nach Gleichung (181) S. 221

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0.$$

Nach Gleichung (72) gilt dann die schon bei den Ableitungen der vorigen §§ benutzte Gleichung

$$\operatorname{curl}^2\mathfrak{A} = -\nabla^2\mathfrak{A}.$$

Dazu kommt die Laplace'sche Gleichung, Gleichung (179)

$$\nabla^2\mathfrak{A} = -4\pi\mathfrak{c}.$$

Ausser den Vectoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{c}$ fassen wir nun ferner noch den Vector $\mathfrak{H}$

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl}\mathfrak{A}$$

ins Auge, der durch diese Gleichung vollständig definirt ist und, wie wir aus den Betrachtungen von § 86, speciell aus Gleichung (191) wissen, mit unserem $\mathfrak{H}_e$ identisch wird, wenn wir $\mathfrak{c}$ die gewöhnlich damit verbundene Bedeutung unterlegen.

Aus der letzten Gleichung folgt zunächst nach Gleichung (71)

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0,$$

also wiederum nach Gleichung (72)

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{H} = -\nabla^2 \mathfrak{H}.$$

Andererseits erhalten wir aus der Definitionsgleichung von $\mathfrak{H}$

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{H} = \operatorname{curl}^3 \mathfrak{A} = -\operatorname{curl}(\nabla^2 \mathfrak{A}) = 4\pi \operatorname{curl} \mathfrak{c},$$

also auch

$$\nabla^2 \mathfrak{H} = -4\pi \operatorname{curl} \mathfrak{c}.$$

Das ist aber die Laplace'sche Differentialgleichung für ein Vectorpotential $\mathfrak{H}$ des Vectors $\operatorname{curl} \mathfrak{c}$. Wir können daher ihr Integral unmittelbar angeben und erhalten

$$\mathfrak{H} = \int \frac{\operatorname{curl} \mathfrak{c}}{r} dv = \operatorname{pot} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{c} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad (203)$$

Da $\mathfrak{H}$ zugleich

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \cdot \operatorname{pot} \mathfrak{c},$$

so folgt damit der allgemeine Satz der Potentialtheorie, um dessen Ableitung es sich handelte,

$$\operatorname{pot} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{c} = \operatorname{curl} \cdot \operatorname{pot} \mathfrak{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (204)$$

d. h. die Operationszeichen pot und curl sind miteinander vertauschbar. Nebenbei bemerkt, gilt dieser Satz indessen auch unabhängig von der beschränkenden Voraussetzung $\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0$. Da er hier nur auf Grössen angewendet werden soll, die diese Voraussetzung erfüllen, sah ich indessen von dem allgemeinen Beweise ab, der sich von dem vorigen nur dadurch unterscheidet, dass an Stelle von $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ der Ausdruck $\operatorname{curl} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A}$ und zwar nach Gleichung (69) S. 57 verschwindet.

Durch Gleichung (203) ist nun zugleich die Aufgabe gelöst, $\mathfrak{H}_e$ in der Form eines Vectorpotentials darzustellen. Geben wir nämlich jetzt $\mathfrak{c}$ wieder die ihm gewöhnlich zukommende Bedeutung, so wird hiernach

$$\mathfrak{H}_e = \int \frac{\operatorname{curl} \mathfrak{c}}{r} dv = \operatorname{pot} \operatorname{curl} \mathfrak{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (205)$$

§ 92. Darstellung von $\mathfrak{H}_m$ als Vectorpotential.

Auch der andere Bestandtheil der ganzen magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ in den Gleichungen (191) und (193), nämlich der von einem scalaren Potentiale ableitbare oder, wie man in der Sprache der materialistischen Auffassung sagt, der von freien magnetischen Massen herrührende $\mathfrak{H}_m$ lässt sich ebenso wie $\mathfrak{H}_e$ in der Form eines Vectorpotentials darstellen. Dabei beruht diese Umformung ebenfalls auf einem allgemeinen Satze der Potentialtheorie und zwar diesmal der Theorie des scalaren Potentials, der das Analogon zu dem durch Gleichung (204) ausgesprochenen Satze bildet. Um der Ableitung ihre allgemeine Gültigkeit zu bewahren, möge zunächst von der speciellen Bedeutung, die den vorkommenden Grössen hier beigelegt wird, abgesehen werden.

Ich betrachte zwei stetig im Raume vertheilte scalare Grössen Ψ und σ_f und einen ebenfalls stetig vertheilten Vector $\mathfrak{H}_m$, die durch folgende Gleichungen mit einander verbunden sind:

$$\Psi = \int \frac{\sigma_f dv}{r} = \operatorname{pot} \sigma_f$$

$$\mathfrak{H}_m = -\nabla \Psi = -\nabla \cdot \operatorname{pot} \sigma_f.$$

Das Operationszeichen pot bezieht sich diesmal auf einen Scalar, ist aber sonst ganz in demselben Sinne wie im vorigen § gebraucht.

Nach Laplace folgt aus der ersten dieser Gleichungen

$$\nabla^2 \Psi = -4\pi \sigma_f.$$

Aus der zweiten erhalten wir durch Ausführung der Operation ∇^2

$$\nabla^2 \mathfrak{H}_m = -\nabla^2 \cdot \nabla \Psi.$$

Allgemein kann aber die Reihenfolge der beiden Operationen ∇^2 und ∇ vertauscht werden, wovon man sich durch die Entwicklung des Ausdrucks $\nabla^2 \cdot \nabla$ bezw. $\nabla \cdot \nabla^2$ nach den für ∇ und ∇^2 gegebenen Definitionen sofort überzeugt. Man hat also auch

$$\nabla^2 \mathfrak{H}_m = -\nabla^2 \cdot \nabla \Psi = -\nabla \cdot \nabla^2 \Psi = 4\pi \nabla \sigma_f.$$

Das ist abermals eine Laplace'sche Differentialgleichung für das Vectorpotential $\mathfrak{H}_m$, das von dem Vector $-\nabla \sigma_f$ genommen ist. Als Lösung erhalten wir daher

$$\mathfrak{H}_m = -\int \frac{\nabla \sigma_f}{r} dv = -\operatorname{pot} \cdot \nabla \sigma_f \,. \quad . \quad . \quad (206)$$

Der Vergleich mit dem zuerst für $\mathfrak{H}_m$ aufgestellten Ausdrucke liefert den Satz, der hier abgeleitet werden sollte:

$$\nabla \cdot \operatorname{pot} \sigma_f = \operatorname{pot} \cdot \nabla \sigma_f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (207)$$

d. h. falls es sich um die Potentiale scalarer Grössen handelt, sind die Operationszeichen pot und ∇ mit einander vertauschbar.

Zugleich ist, wenn wir den Buchstabenbezeichnungen nun die specielle Bedeutung, die sie überall hatten, wieder zuerkennen, durch Gleichung (206) die Aufgabe gelöst, $\mathfrak{H}_m$ in der Form eines Vectorpotentials darzustellen.

§ 93. Der Vector $\nabla \sigma_f$.

Durch die vorhergehende Betrachtung wurden wir zu dem neuen Vector $\nabla \sigma_f$ geführt, dessen Eigenschaften von einiger Wichtigkeit für die Theorie des Magnetismus sind. Denken wir uns in einem magnetischen Felde ein Stück weiches Schmiedeeisen, dessen Permeabilität im Innern constant ist und in den Grenzschichten continuirlich bis zu dem Werthe abnimmt, den μ in der Luft hat. Freie magnetische Massen σ_f können dann nur in den Grenzschichten vertheilt sein; auf diese ist daher auch die Vertheilung des Vectors $\nabla \sigma_f$ beschränkt. Der Vector lässt sich mechanisch construiren, nämlich durch ein Kraftfeld veranschaulichen, das zu dem Potentiale $-\sigma_f$ gehört. Die zugehörigen Kraftlinien gehen sowohl von der Eisenseite als von der Luftseite der Grenzschicht in diese hinein, wenn σ_f dort positiv ist. Die Vertheilung des Vectors ist ferner eine wirbelfreie, aber sie ist nicht solenoidal.

Im Gegensatze hierzu steht der Vector curl $\mathfrak{c}$, als dessen Potential $\mathfrak{H}_e$ sich in § 91 ergab. Seine Vertheilung ist nothwendig solenoidal, aber nicht wirbelfrei. Dasselbe gilt auch von den Grössen $\mathfrak{H}_m$ und $\mathfrak{H}_e$ selbst. Dieser Unterschied ist ein wesentlicher und er verhindert, dass $\mathfrak{H}_e$ und $\mathfrak{H}_m$ im ganzen Raume identisch werden können, wie man auch σ_f und $\mathfrak{c}$ wählen möge.

§ 94. Zerlegung in Elementarmagnete.

Ein Kunstgriff, der seiner analytischen Bedeutung nach auf eine partielle Integration hinauskommt, besteht darin, einen Magneten in Raumelemente zu zerlegen, deren Oberflächen mit freien magnetischen Massen belegt sind, und zwar auch dort, wo, wie im Innern magnetisch weicher Körper, gar keine freien magnetischen Massen in Wirklichkeit auftreten. Man kann dies ausführen, weil sich bei der Summirung an den Grenzflächen zweier Raumelemente die dort fingirten magnetischen Belegungen entgegengesetzten Vorzeichens gegeneinander aufheben, entweder ganz oder nur zum Theile, wenn an dieser Stelle des Raumes schon ursprünglich eine freie magnetische Massenvertheilung gegeben war.

Die materialistische Theorie wurde auf diese Zerlegung der magnetischen Massen, die im Wesentlichen darauf hinausläuft, dass man 0 durch $+m-m$ ersetzen kann und auf die Vorstellung, dass man durch eine solche gekünstelte Zerlegung dem wahren Sachverhalte näher komme als bei der blossen Betrachtung der resultirenden Massenvertheilung im Raume, durch die Nothwendigkeit geführt, zu erklären, wesshalb die Stücke eines Stahlmagneten nach dem Bruche wieder vollständige Magnete sind, wie es also kommt, dass sich an den Bruchstellen neue Pole bilden und warum ferner keine unipolaren Magnete vorkommen.

Für die Kraftlinienlehre ist der Begriff des Elementarmagneten in diesem Sinne durchaus entbehrlich, da sie auch ohne dieses Hülfsmittel bei der natürlichen und ungezwungenen Entwickelung ihrer Vorstellungen von selbst zur Erklärung der genannten Erscheinungen geführt wird. Bis zu einem gewissen Grade steht jener Begriff des Elementarmagneten sogar im Widerspruche mit den Vorstellungen der Kraftlinienlehre. Gewiss kann man sich zwar ein Volumenelement aus einem Stahlmagneten losgelöst denken und es als selbständigen Magneten betrachten. In dieser Isolirung ist es aber gerade in Bezug auf seine magnetischen Eigenschaften durchaus nicht mit dem identisch, was es vorher als Bestandtheil des ganzen Stahlmagneten war. Zum mindesten kommt, selbst wenn man annehmen wollte, dass sich an dem inneren Kraft- und Inductionsflusse nichts geändert haben sollte, doch der äussere Kraftfluss hinzu, der sich von dem früheren durchaus unterscheidet und der doch ebensosehr zur Charakterisirung eines Magneten im Sinne der Kraftlinienlehre von Bedeutung ist, wie der innere. Durch nachträgliche Zusammenfügung solcher „physikalischer" oder „rationeller" Elementarmagnete gelangt man daher zu einem Ganzen, das in magnetischer Hinsicht nicht ohne Weiteres als gleichwerthig mit der Summe seiner Theile gesetzt werden darf.

Ausser diesen „rationellen" kann man auch noch fingirte, nämlich physikalisch nicht realisirbare, aber analytisch und logisch mögliche Elementarmagnete anderer Art angeben, die mit denen der classischen Theorie des Magnetismus in etwas engerer Uebereinstimmung stehen. Man gelangt zu ihnen auf folgende Art. Nachdem der ganze von dem Kraft- und Inductionsflusse erfüllte Raum auf beliebige Weise, am besten jedoch dem Laufe der Inductionsröhren folgend, in einzelne Elemente zerlegt ist, betrachte man die Linienelemente einer bestimmten Kraftlinie, in die diese bei der Raumzerlegung zerstückelt wurde, als einzelne selbständige Kraftlinien, so nämlich, dass von den beiden Endpunkten jedes Linienelementes der eine als Quelle, der andere als Versickerungsstelle angesehen wird. Zu dem gemeinsamen Endpunkte zweier auf einander folgenden Elemente gehört dann zugleich eine Quelle und eine Versickerung von derselben Grösse, so dass sich bei der Summirung beide gegeneinander aufheben.

Anfangs- oder Endpunkte von Kraftlinien, die vorher im Innern des betrachteten Raumelementes lagen, denke man sich nach der einen oder anderen Seite hin bis zur Umfangsfläche verschoben. Das ist zulässig, weil es sich dabei nur um unendlich kleine Verschiebungen der ursprünglich im ganzen Raume vertheilten freien Massen handelt, die sich unter einander noch dadurch ausgleichen, dass man die eine Hälfte der Endpunkte in einem, die andere im entgegengesetzten Sinne verschiebt. Das abzuleitende Resultat kann daher hierdurch keine merkliche Aenderung erfahren. Man erreicht es durch diese Verschiebungen, dass auf dem Umfange jedes Volumenelementes die Zahl der Quellen ebenso gross ist, als die Zahl der Versickerungen, während dafür die algebraische Summe der Quellen und Versickerungen auf einem Flächenstück, in dem zwei aufeinanderfolgende Volumenelemente aneinander grenzen, jetzt im Allgemeinen von Null abweicht.

Ein einzelnes solches von selbständigen Kraftlinien durchzogenes Volumenelement sei als ein fingirter Elementarmagnet bezeichnet. Für sich allein kann er allerdings nur dann ohne jede Aenderung bestehen bleiben, wenn wir uns erstens das Auftreten von wahrem Magnetismus an den Endflächen als möglich vorstellen und uns zweitens die regelmässige transversale Fortpflanzung des Kraftflusses nach aussen hin durch eine magnetische Härte des Materials aufgehoben denken. Physikalisch ist er also nicht möglich. Analytisch kann aber die Gesammtheit aller Elemente des Raumes durch die Summe dieser Elementarmagnete repräsentirt werden.

Selbstverständlich müssen wir uns bei dieser Art der Zerlegung auch den Luftraum in der Umgebung eines Stahlmagneten aus solchen Elementarmagneten zusammengesetzt denken. Gerade um möglichst deutlich hervorzuheben, dass der Begriff des Elementarmagneten nicht an eine Eisenmasse

u. dgl. gebunden ist, sondern auf alle Körper, die von einem Kraftflusse durchzogen sind, anwendbar ist, habe ich diese Zerlegung hier ausführlicher beschrieben.

Die ursprüngliche Vertheilung der freien magnetischen Massen oder nach der Sprache der Kraftlinien der Quellen und Versickerungsstellen des Kraftflusses ist analytisch der jetzt angegebenen völlig gleichwerthig und man kann auf Grund der letzteren das bestehende magnetische Feld genau wie vorher nach dem Coulomb'schen Gesetze ableiten.

Thut man dies, so stösst man allerdings auch im Luftraume auf dieselbe Schwierigkeit, wie nach der gewöhnlichen Theorie im Eisenraume, dass nämlich der Aufpunkt, für den wir die magnetische Kraft berechnen wollen, mitten in die fingirte Massenvertheilung von Magnetismus abwechselnden Vorzeichens hineinfällt. Man kann dies zwar wie dort dadurch umgehen, dass man um den Aufpunkt herum eine unendlich kleine Höhle herstellt und die magnetischen Belegungen der Höhlenfläche mit in Rechnung zieht.

Einfacher ist es aber, diese Schwierigkeit wenigstens für den Luftraum ganz dadurch zu vermeiden, dass man eine noch etwas geänderte und der ursprünglichen ebenfalls analytisch gleichwerthige Massenvertheilung vornimmt.

Um diese möglichst anschaulich zu beschreiben, verfolge ich eine geschlossene Inductionsröhre, die theils im Luftraume, theils im Eisenraume eines magnetischen Feldes verläuft. Nach dem Gesetze der solenoidalen Vertheilung von $\mathfrak{B}$ ist dann Bdf für jeden Querschnitt dieser Röhre gleich gross. Die Masse an den beiden Endquerschnitten jedes der Elemente, in die man die Röhre durch Quertheilung zerlegen kann, ist, da $\sigma_f = \operatorname{div} \mathfrak{H}/4\pi$ zu setzen ist, bei der vorigen Massenvertheilung, vom Vorzeichen abgesehen, gleich $Hdf/4\pi$ oder gleich $Bdf/4\pi\mu$. Dieser Werth wechselt mit μ; er ist am grössten im Luftraume und am kleinsten im Innern des Eisenkörpers. An den Endquerschnitten aller Elemente denke ich mir nun noch die Massen $\pm Bdf/4\pi\mu_0$ zu der vorigen Massenvertheilung über diese Endquerschnitte hinzugefügt, wobei mit μ_0 die Permeabilität des Luftraumes bezeichnet ist. Das ist zulässig, weil die angegebene Masse für alle Volumenelemente constant ist und weil daher an jedem Querschnitte df die von beiden Seiten her aufgelagerten Massen entgegengesetzten Vorzeichens sich genau gegen einander fortheben. Das Minuszeichen in $-Bdf/4\pi\mu_0$ soll natürlich nur die Bedeutung haben, dass es an jedem Endquerschnitte eines Elementes eine der dort schon vorhandenen entgegengesetzte Masse angibt. Im Ganzen ist daher überall die neu aufgebrachte magnetische Masse genau gleich Null.

Bei allen Volumenelementen im Luftraum verschwinden aber nun die Endbelegungen jetzt schon für sich genommen infolgedessen vollständig. Die Endbelegungen eines Volumenelementes im Eisenraume, bezw. auch in den Grenzschichten, wo die Permeabilität continuirlich aus dem Werthe μ_0 in den für das Innere des Eisens gültigen übergehen mag, betragen dagegen jetzt $\pm(Bdf/4\pi\mu - Bdf/4\pi\mu_0)$, wofür auch

$$\mp \frac{Hdf}{4\pi}\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)$$

geschrieben werden kann. In Bezug auf das Vorzeichen bemerke ich, dass bei der vorher gewählten Massenvertheilung jener Endquerschnitt jedes Elementes der Inductionsröhre, auf den die Vectoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ hingerichtet waren, eine Versickerungsstelle bildete, also mit negativer Masse belegt werden musste. Jetzt hat sich das Vorzeichen der neu angegebenen Massenvertheilung umgekehrt; an den in der Richtung von $\mathfrak{H}$ gelegenen Endquerschnitten hat man sich daher im Eisenraume eine positive Masse von dem angegebenen absoluten Betrage aufgelegt zu denken.

Durch diese neue, an sich völlig willkürliche, der ursprünglich gegebenen aber analytisch gleichwerthige Vertheilung der magnetischen Massen, die nur zu dem Zwecke einer erleichterten Berechnung der schliesslich resultirenden magnetischen Kraft erdacht wurde, werden wir auf jenen Begriff geführt, der für die classische Theorie des Magnetismus eine so fundamentale Bedeutung hatte, während er für die Kraftlinienlehre nur die Rolle eines ganz untergeordneten Hülfsbegriffes spielt. Es ist das die **magnetische Intensität** und mit ihr wird zugleich auch der Begriff der **magnetischen Susceptibilität** eingeführt.

Unter der magnetischen Intensität $\mathfrak{J}$ verstehen wir nämlich einen in isotropen Körpern mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ gleichgerichteten Vector, der mit $\mathfrak{H}$ von derselben physikalischen Dimension ist und durch die Gleichung

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{H} \frac{\mu - \mu_0}{4\pi\mu_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (208)$$

definirt wird. Der Factor von $\mathfrak{H}$ in dieser Gleichung wird die magnetische Susceptibilät $\varkappa$ genannt, so dass auch

$$\varkappa = \frac{\mu - \mu_0}{4\pi\mu_0}; \quad \mathfrak{J} = \varkappa \cdot \mathfrak{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (209)$$

dafür geschrieben werden kann. Mit $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ geht Gleichung (208) ausserdem in die aus der gewöhnlichen Theorie wohlbekannte

$$\mathfrak{B} = \mu_0 (\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (210)$$

über, der hier nur der Factor μ_0 (Permeabilität des Luftraumes) beizufügen war. Bei der Anwendung des üblichen magnetischen Maasssystems bleibt die Gleichung numerisch auch nach Streichung dieses Factors noch richtig. Ein Urtheil über die wahren Dimensionen der darin vorkommenden Grössen kann aber nur aus der vollständigen Gleichung (210) geschöpft werden.

Da div $\mathfrak{B}$ überall Null und μ_0 constant ist, folgt aus Gleichung (210) ferner

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = -4\pi \operatorname{div} \mathfrak{J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (211)$$

und daher

$$\sigma_f = -\operatorname{div} \mathfrak{J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (212)$$

Wir haben daher auf künstliche Art einen Vector $\mathfrak{J}$ neu construirt, der im Luftraume nach Gleichung (208) überall Null ist und aus dessen div sich dabei ebensogut wie aus der div von $\mathfrak{H}$ die freie magnetische Massenvertheiluug ableiten lässt.

Die eigentliche Bedeutung von $\mathfrak{J}$ liegt aber nur in der erleichterten Berechnung des magnetischen Feldes nach dem Fernwirkungsgesetze auf Grund der zu diesem Zwecke ausgedachten und vorhin näher beschriebenen Massenvertheilung. Am Endquerschnitte jedes Elementes einer Inductionsröhre, das in der Richtung der Vectoren $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$ und auch $\mathfrak{J}$ liegt, hat man sich zu diesem Zwecke eine positive Masse von der Grösse Jdf, wo J den Tensor von $\mathfrak{J}$ bedeutet, angebracht zu denken.

Ausdrücklich mache ich noch darauf aufmerksam, dass man mit demselben Rechte und auch mit demselben Erfolge die Massen $-\, {}^{Bdf}/_{4\pi\mu_e}$, wo μ_e den constanten Werth, den μ etwa im Innern der Eisenmasse annimmt, an Stelle der Massen $-\, {}^{Bdf}/_{4\pi\mu_0}$ bei der vorigen Betrachtung hätte hinzufügen dürfen. Man hätte dann erreicht, dass der ganze innere Eisenraum von magnetischen Belegungen der einzelnen Elemente frei geworden wäre und dass man dann für diesen den Vortheil einer vereinfachten Berechnung der magnetischen Kraft gehabt hätte. Luftraum und Eisenraum (mit Ausnahme der Uebergangsschichten) hätten dann einfach die Rollen getauscht.

Aus dieser Erwägung geht auf das Deutlichste hervor, dass $\mathfrak{J}$ keineswegs dieselbe fundamentale physikalische Bedeutung wie die Vectoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ haben kann, dass es vielmehr nur ein durch willkürliche Subtraction zweier physikalisch bedeutsamer Grössen geschaffener Hülfsbegriff ist, dem nur eine untergeordnete Rolle in einer geläuterten Theorie zugestanden werden kann.

§ 95. Aequivalenz eines Kreisstromes mit einer magnetischen Schale nach Ampère.

Bei der Behandlung des Vectorpotentials dürfen wir nicht versäumen, auch die wichtigsten Ergebnisse der Fernwirkungstheorie in die Maxwell'sche Theorie einzugliedern, soweit sie von dieser als gültig erkannt werden oder, falls dies nöthig ist, sie so umzugestalten, dass sie sich in den gegebenen Rahmen fügen. Dazu gehört auch der in der Ueberschrift genannte Ampère'sche Satz.

Unter einer **Schale** versteht man in diesem Zusammenhange einen Raum, der von zwei unendlich benachbarten ebenen oder stetig gekrümmten Flächen und einer entsprechenden Randfläche, deren Erzeugende normal zu diesen Flächen stehen, eingeschlossen wird. Wenn eine der beiden Ansichtsflächen eine Belegung von freier positiver, die andere eine ebensogrosse von negativer magnetischer Masse trägt, hat man eine **magnetische Schale**.

Aus einer solchen Schale grenze ich zunächst ein cylindrisches Element ab, dessen Basisfläche df von sehr kleinen Abmessungen gegenüber der ebenfalls unendlich kleinen Dicke der Schale ist, die als Vector mit $\mathfrak{a}$ bezeichnet werden soll. Die Dichte der magnetischen Flächenbelegung sei $\pm m$, so dass das Raumelement an seinen Enden die magnetischen Massen $+ mdf$ und $- mdf$ trägt. Den zu den Ansichtsflächen normal stehenden Vector $\mathfrak{a}$ denke ich mir von der negativ belegten zur positiv belegten Ansichtsfläche hingerichtet.

Die magnetische Kraft $d\mathfrak{H}_m$, die im Aufpunkte durch den Verein der beiden Massen $+ mdf$ und $- mdf$ hervorgebracht wird, berechnet sich nach dem Coulomb'schen Gesetze zu

$$d\mathfrak{H}_m = mdf\frac{\mathfrak{r}}{r^3} - mdf\frac{\mathfrak{r}+\mathfrak{a}}{\left(r+\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{r}\right)^3},$$

wobei der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ vom Aufpunkte nach dem negativen Pole des Elementes hin gezogen ist. Kürzer lässt sich dies schreiben

$$d\mathfrak{H}_m = -mdf(\mathfrak{a}\nabla)\frac{\mathfrak{r}}{r^3},$$

oder, da nach § 36, S. 85.

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3}$$

ist, auch

$$d\mathfrak{H}_m = mdf(\mathfrak{a}\nabla)\cdot\nabla\frac{1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (213)$$

Durch Ausführung der Differentialoperationen oder auch unmittelbar durch Entwickelung des zuerst angegebenen Ausdrucks, wobei unendlich kleine Grössen höherer Ordnung zu vernachlässigen sind, erhält man dafür noch

$$d\mathfrak{H}_m = mdf\left(3\mathfrak{r}\cdot\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{a}}{r^5} - \frac{\mathfrak{a}}{r^3}\right).$$

Damit ist $d\mathfrak{H}_m$ durch zwei Componenten dargestellt, von denen eine in die Richtung von $\mathfrak{r}$ und die andere in die Richtung von $\mathfrak{a}$ fällt. Bei der weiteren Betrachtung werde ich indessen von dem durch Gleichung (213) gegebenen Ausdrucke Gebrauch machen.

Bei dieser Betrachtung war vorausgesetzt worden, dass die Querschnittsdimensionen des Raumelementes von höherer Ordnung unendlich klein seien als die Schalendicke $\mathfrak{a}$. Dies geschah, um die Aenderungen, die $\mathfrak{r}$ bei Verschiebungen des Punktes in der Querschnittsfläche selbst erfährt, gegenüber jenen, die der Längsverschiebung $\mathfrak{a}$ entsprechen, vernachlässigen zu können. Wir können aber jetzt den Ausdruck für $d\mathfrak{H}_m$ in Gleichung (213) ohne Weiteres auch auf ein Schalenelement von grösserer Querschnittsfläche df anwenden, falls wir dann entweder unter $\mathfrak{r}$ und seinen Ableitungen passend gewählte Mittelwerthe verstehen oder Gleichung (213) über die kleineren Elemente der neuen Querschnittsfläche integriren.

Ich betrachte jetzt fernerhin ein solches grösseres Schalenelement und zwar so, dass die Basis df zwar immer noch unendlich klein ist, so dass sie, da sie zu einer stetig gekrümmten Fläche gehört, als ebenflächiges Element angesehen werden kann, während ihre Abmessungen doch gross im Vergleiche zur Schalendicke sein sollen. Parallel zu den Basisflächen denke ich mir einen Mittelschnitt durch das Element gelegt, der die Schalendicke $\mathfrak{a}$ halbirt. Die Grenzlinie der Mittelschnittfläche sei fortan kurz als die Randcurve des Schalenelementes bezeichnet. Längs dieser Randcurve denke ich mir um das Schalenelement einen linearen elektrischen Strom gelegt. Unter einem linearen Strome ist hierbei ein solcher zu verstehen, dessen Querschnittsfläche Null oder doch unendlich klein ist, während die Gesammtintensität $\mathfrak{c}q$, falls q hier die Querschnittsfläche des Stromes bezeichnet, doch endlich bleibt. Dazu gehört, dass die Stromdichte $\mathfrak{c}$ unendlich gross ist. Physikalisch ist ein solcher linearer Strom natürlich nicht möglich; der Begriff bildet nur eine mathematische Abstraction, die sich aber für die theoretische Behandlung vieler Aufgaben von grossem Nutzen erweist.

Den Umlaufssinn des Stromes denke ich mir so gewählt, dass die Aufeinanderfolge $\mathfrak{a}\mathfrak{b}d\mathfrak{s}$ ein Rechtssystem im Raume bildet, wenn unter $\mathfrak{a}$ wie vorher die Schalendicke, unter $d\mathfrak{s}$ ein im Sinne des Stromes gezähltes Linienelement der Randcurve und unter $\mathfrak{b}$ ein Radiusvector verstanden wird, der von einem Punkte im Innern des Mittelschnitts nach $d\mathfrak{s}$ hin gezogen ist. Für einen Beschauer, der die Schale so betrachtet, dass er die negativ belegte Ansichtsfläche vor sich hat, geht dieser Strom im Sinne des Uhrzeigers herum.

An die Stelle von $\mathfrak{c}dv$ in den früheren Formeln tritt in unserem Falle $Cd\mathfrak{s}$, wenn wir die ganze Stromstärke als Scalar, der nach dem Gesetze der solenoidalen Vertheilung von $d\mathfrak{s}$ unabhängig ist, mit C bezeichnen.

Ich behaupte jetzt, dass die magnetische Kraft $\mathfrak{H}_e$, die von dem soeben näher beschriebenen Strome ausgeht, für jeden Aufpunkt, der sich in endlicher Entfernung von der Schale (mindestens aber nicht in dem Schalenelemente selbst) befindet, bei geeigneter Wahl von C identisch mit der Kraft $\mathfrak{H}_m$ wird, die von den magnetischen Belegungen des Schalenelementes ausgeübt wird. — Um dies zu beweisen, schreibe ich zunächst den Ausdruck für die Kraft $\mathfrak{H}_e$ an, der sich aus Gleichung (193) S. 227 ergibt. Das Glied $\mathfrak{H}_m$ in jener Gleichung fällt hier ganz fort und für $\mathfrak{c}dv$ lässt sich, wie schon bemerkt, $Cd\mathfrak{s}$ setzen, so dass man

$$\mathfrak{H}_e = -C\int \frac{1}{r^3} \mathbf{V}\, d\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{r}$$

erhält. Nach einem schon oft benutzten Satze über den Werth von $\nabla {}^1/_r$ lässt sich dafür auch

$$\mathfrak{H}_e = C \int V d\mathfrak{s} \cdot \nabla \frac{1}{r} \quad \dots\dots \quad (214)$$

schreiben. Dieser Ausdruck bildet, von dem Factor C abgesehen, das über eine geschlossene Curve erstreckte Vectorlinienintegral des Vectors $\nabla \frac{1}{r}$ und zwar kann nach dem vorher Bemerkten die Curve als eine ebene angesehen werden. Wir können daher den in § 32 abgeleiteten und durch Gleichung (100) ausgesprochenen Satz auf den Ausdruck anwenden und diesen damit in ein Oberflächenintegral über die Fläche des Mittelschnitts transformiren.

An die Stelle von div $\mathfrak{A}$ in Gleichung (100) tritt hier $\nabla^2 \frac{1}{r}$. Zur Ausführung der Operation ∇^2 an $1/r$ hat man in der Potentialtheorie öfters Veranlassung. Es ist daher ein sehr bekanntes Resultat, dass sie Null ergibt. Das folgt schon aus der Laplace'schen Gleichung, wenn man sie auf das Kraftfeld rings um einen isolirten Massenpunkt anwendet. Um keine Lücke zu lassen, werde ich diesen Satz jedoch hier in aller Kürze nochmals ab ovo ableiten. Der Reihe nach ist

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2;$$

$$r \frac{\partial r}{\partial x} = r_1; \quad r \frac{\partial r}{\partial y} = r_2; \quad r \frac{\partial r}{\partial z} = r_3;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{r_1}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{r_2}{r^3}; \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{r_3}{r^3};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3 r_1}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3 r_1^2}{r^5};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3 r_2^2}{r^5}; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3 r_3^2}{r^5}.$$

Durch Addition der drei letzten Gleichungen finden wir also in der That

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (215)$$

Bei Anwendung von Gleichung (100) auf unseren Fall verschwindet daher das erste Glied.

Beachtet man noch, dass der Werth $\mathfrak{R}$ in Gleichung (97) der Aufeinanderfolge $\mathfrak{R} d\mathfrak{s}$ im Vectorproducte entspricht, während in Gleichung (214) der Factor $d\mathfrak{s}$ vorn stand, was mit einem Vorzeichenwechsel verbunden ist, so erhalten wir nach Gleichung (100)

$$\mathfrak{H}_e = C\int \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} \cdot \mathfrak{N}\right) df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (216)$$

Der in dieser Gleichung vorkommende Einheitsvector $\mathfrak{N}$ ist zum ersten Male in § 30 unmittelbar vor Gleichung (89) eingeführt worden und zwar wurde damals festgesetzt, dass die Aufeinanderfolge der dort mit $\mathfrak{a}$, $d\mathfrak{a}$, $\mathfrak{N}$, hier aber mit $\mathfrak{b}$, $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{N}$ bezeichneten Grössen zu einem Rechtssysteme im Raume führen müsse. Andererseits setzten wir vorhin bei der Wahl des Umlaufssinnes von $d\mathfrak{s}$ fest, dass die Aufeinanderfolge $\mathfrak{a}\mathfrak{b}d\mathfrak{s}$ oder, was dasselbe ist, $\mathfrak{b}d\mathfrak{s}\mathfrak{a}$ ein Rechtssystem bilden solle. Aus dem Vergleiche ergibt sich daher, dass $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{a}$ gleich gerichtet ist. Wenn der Tensor von $\mathfrak{a}$ wie gewöhnlich mit a bezeichnet wird, kann man daher für $\mathfrak{N}$ setzen $\mathfrak{a}/a$. Für $\mathfrak{H}_e$ erhalten wir dann

$$\mathfrak{H}_e = \frac{C}{a}\int \nabla \left(\mathfrak{a} \cdot \nabla \frac{1}{r}\right) df \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (217)$$

Die Schalendicke ist hierbei als constant für das ganze Schalenelement betrachtet. — Nun ist aber die Reihenfolge der Operationen ∇ und $\mathfrak{a}\nabla$ an einem Scalar stets mit einander vertauschbar, wovon man sich durch einfache Entwickelung der Ausdrücke sofort überzeugt. Denken wir uns also Gleichung (213), die sich zunächst auf ein Flächenelement der kleineren Ordnung bezog, über die ganze Fläche des jetzt in Frage kommenden Schalenelementes integrirt, so wird $\mathfrak{H}_e$ in der That mit $\mathfrak{H}_m$ völlig identisch, falls man

$$C = a \cdot m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (218)$$

setzt.

Damit ist der Ampère'sche Satz über die Aequivalenz der Fernwirkungen des Kreisstromes und einer von diesem begrenzten magnetischen Schale zunächst für ein unendlich kleines Element der Schale bewiesen.

Das Product *am* heisst das auf die Flächeneinheit bezogene **magnetische Moment** der Schale.

Um den Satz auch auf den Fall einer endlichen Flächenausdehnung der Schale, damit also auch auf die ganze ursprüngliche Schale zu übertragen, setzen wir voraus, dass das magnetische Moment *am* für die ganze Schale constant ist. Jedes Schalenelement kann dann in Bezug auf seine Fernwirkungen nach dem seither Bewiesenen durch einen Strom C von der ermittelten Stärke und Umlaufsrichtung ersetzt werden. Die ganze magnetische Schale ist dann dem Vereine aller dieser „Kreisströme", wie man sie nennt, ohne jedoch dabei vorauszusetzen, dass die Randcurven wirkliche Kreise seien, äquivalent.

Denkt man sich nun die Mittelschnittfläche in derselben Weise, wie es in § 30 besprochen und durch Abbildung 8 erläutert war, durch zwei Linienschaaren in die seither betrachteten Elemente zerlegt, so heben sich auf jedem Randcurvenelemente, das zwei benachbarten Flächenelementen gemeinsam ist, die fingirten elektrischen Ströme C gegeneinander auf. Nach der Voraussetzung, dass *am* constant ist, haben nämlich die Ströme C, die beide Flächenelemente umkreisen, dieselbe Intensität und bei gleichem Umlaufssinne um beide Flächenelemente sind sie für das gemeinsame Randcurvenstück von entgegengesetzter Richtung. Beim Zusammenfassen aller Ströme bleiben daher nur jene Stromelemente übrig, die zu Elementen der Randcurve der ganzen Schale gehören. Diese zusammen ergeben aber einen in sich geschlossenen, die ganze Schale längs ihrer Randcurve in dem früher festgesetzten Sinne umkreisenden linearen Strom von der Stärke $C = am$.

§ 96. **Das Vectorpotential einer magnetischen Schale.**

Durch die vorhergehenden Untersuchungen sind wir jetzt auch in den Stand gesetzt, die Aufgabe, mit deren Besprechung wir in § 89 begannen, deren Behandlung wir aber dann abbrechen mussten, zu lösen, nämlich das Vectorpotential eines Magneten zu bestimmen. Hier lösen wir diese Aufgabe zunächst für das Element einer magnetischen Schale und im unmittelbaren Anschlusse daran für eine magnetische Schale von endlicher Flächenausdehnung.

Es handelt sich also jetzt darum, einen Vector $\mathfrak{A}_m$ in Form eines Vectorpotentials darzustellen, so dass

$$\mathfrak{H}_m = \operatorname{curl} \mathfrak{A}_m$$

in allen Gebietstheilen ist, die ausserhalb der magnetischen Schale liegen.

Zu diesem Zwecke forme ich den in Gleichung (213) gegebenen Werth der Kraft $d\mathfrak{H}_m$, die von dem dort betrachteten Schalenelemente herrührt, mit Hülfe von Gleichung (83) S. 64 weiter um. Hiernach ist

$$(\mathfrak{a}\nabla) \cdot \nabla \frac{1}{r} = \mathfrak{a} \operatorname{div} \nabla \frac{1}{r} + \operatorname{curl}_r \mathsf{V} \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathfrak{a}.$$

Da div ∇ an einem Scalar mit ∇^2 identisch ist, verschwindet hier das erste Glied auf der rechten Seite nach Gleichung (215). Wir erhalten daher aus Gleichung (213)

$$d\mathfrak{H}_m = m df \operatorname{curl}_r \mathsf{V} \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathfrak{a}.$$

Die partielle Differentialoperation curl_r bezieht sich hier auf Veränderungen, die der dahinter stehende Ausdruck erfährt, wenn man Verschiebungen des Endpunktes des Radiusvectors $\mathfrak{r}$ vornimmt. Wie schon in § 85 besprochen wurde, können wir uns dafür den Aufpunkt verschoben denken, falls wir das Vorzeichen des Ausdrucks umkehren. Schreiben wir in diesem Falle curl_r' und tragen dem Vorzeichenwechsel durch eine geänderte Reihenfolge der Factoren des Vectorproducts Rechnung, so erhalten wir

$$d\mathfrak{H}_m = m df \operatorname{curl}_r' \mathsf{V} \mathfrak{a} \cdot \nabla \frac{1}{r}.$$

Setzen wir also

$$d\mathfrak{A}_m = m\,df \bigvee \mathfrak{a}\nabla\frac{1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (219)$$

so wird

$$d\mathfrak{H}_m = \operatorname{curl} d\mathfrak{A}_m,$$

denn die Operation curl bezieht sich in diesem Zusammenhange an sich schon auf blosse Verschiebungen des Aufpunktes, hat also dieselbe Bedeutung wie vorher curl'_r.

Das Vectorpotential $\mathfrak{A}_m$ der ganzen magnetischen Schale, also jener Vector, dessen curl überall ausserhalb der Schale die ganze von dieser herrührende magnetische Kraft $\mathfrak{H}_m$ liefert, ergibt sich nun ebenfalls, wenn wir Gleichung (219) über die ganze Schalenfläche integriren.

$$\mathfrak{A}_m = \int m\,df \bigvee \mathfrak{a}\cdot\nabla\frac{1}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (220)$$

Auch jetzt ist $\mathfrak{A}_m$ allerdings noch nicht speciell in jener analytischen Form dargestellt, die uns berechtigte, es als das Potential eines Vectors zu bezeichnen. Auch dazu verhilft uns aber eine fernere Umformung, die sich an dem gefundenen Ausdrucke mit Hülfe von Gleichung (96) in Verbindung mit der Definitionsgleichung (91) für das darin vorkommende $\mathfrak{J}$ vornehmen lässt. Verstehen wir, wie dort, unter $\mathfrak{N}$ eine Einheitsnormale, so ist $\mathfrak{a} = a\mathfrak{N}$. Falls demnach, wie bei einer magnetischen Schale, wenn nichts anderes bemerkt wird, stets anzunehmen ist, am für die ganze Schalenfläche constant ist, lässt sich zunächst für Gleichung (220) schreiben

$$\mathfrak{A}_m = am\int \bigvee \mathfrak{N}\cdot\nabla\frac{1}{r}\,df$$

und nach den angezogenen Gleichungen geht dies über in

$$\mathfrak{A}_m = am\int\frac{1}{r}\,d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (221)$$

Das ist aber, wenn wir auf die Bezeichnungen des vorigen § und speciell auf Gleichung (218) zurückgehen, nichts anderes als

$$\mathfrak{A}_m = \int\frac{C}{r}\,d\mathfrak{s} = \int\frac{\mathfrak{c}}{r}\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (222)$$

Die Linienintegrale sind hier natürlich auf die Randcurve der magnetischen Schale zu erstrecken und wir sind damit zu dem Satze gelangt, dass das Vectorpotential einer magnetischen Schale durch das Potential der elektrischen Strömung um die Randcurve angegeben wird, die nach dem Ampère'schen Satze in Bezug auf die Fernwirkungen der magnetischen Schale äquivalent ist. — Das ist natürlich nur eine andere Form der Aussprache dieses Satzes und wir hätten in der That die Entwickelungen in § 95 als entbehrlich fortlassen können, falls es nur darauf angekommen wäre, den Satz selbst zu beweisen. Es schien mir aber wünschenswerth, diesen wichtigen Satz von allen Seiten her zu beleuchten.

§ 97. Ersatz von Magneten durch elektrische Ströme.

Wiederholt ist schon darauf hingewiesen worden, dass man durch keine Art der Vertheilung ein System elektrischer Ströme herzustellen vermag, das im ganzen Raume unter der Voraussetzung einer constanten Permeabilität genau denselben Kraftfluss erzeugt, wie er etwa von einem Stahlmagneten ausgeht. Die Voraussetzung der constanten Permeabilität ist aber für die Fernwirkungslehre selbstverständlich, da sie den Factor μ in allen ihren Formeln unterdrückt. Die Hypothese, dass die magnetischen Kräfte im engeren Sinne (nämlich die Kräfte $\mathfrak{H}_m$) in Wirklichkeit von elektrischen Strömen herrührten, ist daher unbedingt zu verwerfen.

Man hat sich diesem Schlusse zwar dadurch zu entziehen gesucht, dass man sagte, die Macht der Analyse höre auf, sobald man auf die molekulare Structur Rücksicht nehme. Die analytische Behandlung setze eine stetige Vertheilung der Ströme und magnetischen Massen im Raume voraus, die in Wirklichkeit nicht zutreffe. Sie könne uns daher keinen Aufschluss darüber geben, welcher magnetische Kraftfluss von den einzelnen Molekularströmen ausgehe.

Das trifft nun zwar insofern zu, als man nicht aus den

Formeln, die für grössere Raumgebiete gelten, Schlüsse auf einen rein molekularen Bereich ziehen darf. Ich glaube aber, dass der Einwand hinfällig wird, sobald man nicht mit solchen Formeln, sondern nur mit den einfachsten Begriffen operirt, die ihnen zu Grunde liegen.

Auf jeden Fall unterscheiden sich nämlich alle Kraftfelder $\mathfrak{H}_e$, die von einem Systeme elektrischer Ströme ausgehen, principiell dadurch von den Kraftfeldern $\mathfrak{H}_m$, dass $\mathfrak{H}_e$ im ganzen Raume solenoidal, $\mathfrak{H}_m$ dagegen überall wirbelfrei vertheilt ist. Kraftfelder, die im ganzen Raume gleichzeitig solenoidal und wirbelfrei vertheilt wären, gibt es aber nicht. Wollten wir diese doppelte Bedingung auferlegen, so müsste $\mathfrak{H}$ überall Null sein.

Wenn ein Molekularstrom überhaupt ein elektrischer Strom mit den Kennzeichen sein soll, die mit diesem Begriffe sonst überall verbunden sind, so kann er nur in sich geschlossene Kraftlinien aussenden. Wie man nun auch eine beliebige Summe solcher Molekularströme gruppiren mag, man wird es niemals erreichen können, dass eine in sich nicht geschlossene Kraftlinie zu Stande käme. Die magnetischen Felder $\mathfrak{H}_m$ sind aber gerade dadurch characterisirt, dass Kraftlinien-Quellen und -Versickerungen in ihnen auftreten. Durch diese Betrachtung ist auch für eine molekulare Vertheilung der Ampère'schen Ströme unwiderleglich nachgewiesen, dass sie nicht im Stande sind, das, was man als magnetische Massen bezeichnet, zu ersetzen oder überhaupt ein Kraftfeld $\mathfrak{H}_m$ hervorzurufen. Wollte man aber bei dieser Schlussfolgerung die Prämisse beanstanden, dass ein Molekularstrom nur in sich geschlossene Kraftlinien aussende, so würde von dem Begriffe des Molekularstroms nichts übrig bleiben, was dazu berechtigte, ihn ferner noch als einen elektrischen Strom in dem mit dieser Bezeichnung sonst überall verbundenen Sinne anzusehen. Denn gerade durch das magnetische Kraftfeld, das er hervorruft, wird jeder elektrische Strom am besten characterisirt; vermittelst dieses Kraftfeldes schliessen wir auf seine Stärke und gerade das Kraftfeld ist es auch, das von allen Eigenschaften, die uns sonst von elektrischen Strömen bekannt sind, von der Ampère'schen Hypothese allein in Anspruch genommen wird. Aendern wir nun gerade in dieser hier ausschliesslich in Betracht kommenden Beziehung die Eigenschaften des Molekularstroms vollständig gegen die Eigenschaften aller sonst bekannten Ströme, so haben wir ein Novum, das mit einem elektrischen Strome überhaupt nicht mehr verglichen werden kann. Die Ampère'sche Hypothese, bezw. die Theorie der Molekularströme ging aber darauf hin, mit den elektrischen Strömen im gewöhnlichen Sinne des Wortes zur Erklärung der Kraftfelder $\mathfrak{H}_m$ auszukommen und sie ist durch diese Ausführungen daher vollständig widerlegt.

In der That hat es ja auch noch Niemand vermocht, auf der Oberfläche, bezw. in den Grenzschichten eines Eisenstücks eine solche Vertheilung elektrischer Ströme anzugeben, die gleichzeitig für den Luftraum und für den Eisenraum (man denke hier etwa an den weichen Eisenkern eines Elektromagneten) unter der Voraussetzung, dass μ constant ist, zu derselben Kraftvertheilung führte, wie wir sie in Wirklichkeit beobachten. Nur dann, wenn wie bei einem Ringmagneten der Kraftfluss an sich nur auf den Eisenraum beschränkt ist und freie magnetische Massen überhaupt nicht ins Spiel kommen, gelingt ein solcher Ersatz. Scheinbar gelingt er bei einem unendlich langen Solenoid bezw. dem ihm gleichwerthigen unendlich langen Stabmagneten, aber auch nur desshalb, weil man sich hierbei der Betrachtung der Enden, wo die freien magnetischen Massen auftreten, enthebt.

Man erkennt hieraus, auf einem wie unsicheren Boden man sich bewegt, wenn man die Theorie der magnetischen Erscheinungen an die gewöhnliche Elektrodynamik, die keine Unterschiede in der Permeabilität in Betracht zieht, dadurch anzugliedern sucht, dass man überall, wo Eisenmassen vorkommen, zu deren Berücksichtigung Ampère'sche Molekularströme einführt.

Möglich ist ein solcher Ersatz dagegen, so lange man nur das Kraftfeld in der Luft im Auge hat. Möglich ist er auch, wenn es sich nur um das Kraftfeld im Innern eines weichen Eisenstücks handelt; aber in diesem Falle ist das nach Ampère zu fingirende Stromsystem von dem im vorhergehenden Falle verschieden.

Man wird nach den vorhergehenden Betrachtungen auf die Möglichkeit eines theilweisen Ersatzes der Wirkung der magnetischen Massen, wenn wir uns der Sprache der materialistischen Theorie bedienen (oder des Ersatzes für den Einfluss, den die Verschiedenheit der Permeabilität ausübt, nach der Sprache der Kraftlinienlehre) durch ein System fingirter elektrischer Ströme längst nicht mehr das Gewicht legen dürfen, das ihr in der älteren Theorie zugesprochen wurde. Aber schon des historischen Interesses wegen, das sich an diese Untersuchungen knüpft und mehr noch desshalb, weil eine grosse Zahl von Physikern an dem Standpunkte der classischen Theorie immer noch unverrückt festhält, darf ich es nicht versäumen, diese Betrachtung bis zum Schlusse hin durchzuführen.

Zu diesem Ziele gelangen wir jetzt leicht durch eine Verbindung der Untersuchungen über die Aequivalenz zwischen Kreisströmen und magnetischen Schalen mit der früher angenommenen Zerlegung eines Magneten in sog. Elementarmagnete. In § 94 wies ich nach, dass es sich bei einer Zerlegung, wie sie nach der Fernwirkungslehre üblich ist, nur um eine für die weitere Betrachtung bequemere Repartition der freien magnetischen Massen handelt.

Sobald das magnetische Feld im Luftraume ausschliesslich in Betracht kommt, gelangen wir zu einer für diese Untersuchung bequemeren Massenvertheilung durch die Benutzung des durch Gleichung (208) S. 243 definirten Vectors $\mathfrak{J}$. Jedes Raumelement in der Eisenmasse, das so wie in § 94 als unendlich kleiner Abschnitt einer Inductionsröhre gedacht werden mag, ist an den beiden Querschnittsflächen ∂f mit entgegengesetzt gleichen freien magnetischen Massen von der Grösse Jdf belegt zu denken. Die zum Luftraum gehörigen magnetischen Raumelemente erfahren gar keine Belegungen. Die Gesammtsumme aller Belegungen ergibt dagegen, wie es für die Rechtfertigung der gewählten Massenzerlegung hinreichend und nothwendig ist, wieder genau jene Vertheilung der magnetischen Massen σ_f im Raume, die durch die künstlich ausgedachte Vertheilung ersetzt werden sollte.

Jedes Raumelement in der Eisenmasse ist aber dann identisch mit dem Elemente einer magnetischen Schale. Die Wirkung nach aussen kann daher durch einen Strom längs der Randcurve von der Stärke $C = aJ$ oder, was dasselbe ist, gleich $\mathfrak{a}\mathfrak{J}$ ersetzt werden.

Für die Aufstellung des Ausdrucks der im Luftraum erzeugten magnetischen Kraft oder auch des Vectorpotentials steht es nun völlig frei, das soeben angegebene System elektrischer Kreisströme oder die magnetischen Belegungen der Volumenelemente selbst zu Grunde zu legen. Die Integration der früher gegebenen Werthe über den ganzen Eisenkörper führt in jedem Falle zu dem verlangten Resultate.

So erhält man aus Gleichung (213)

$$\mathfrak{H}_m = \int J df \cdot (\mathfrak{a} \nabla) \cdot \nabla \frac{1}{r} = \int J \left(\frac{\mathfrak{J}}{J} \nabla \right) \cdot \nabla \frac{1}{r} \, dv$$
$$= \int \varkappa H \left(\frac{\mathfrak{H}}{H} \nabla \right) \cdot \nabla \frac{1}{r} \, dv \quad \ldots \ldots \ldots \quad (223)$$

Unter $\mathfrak{H}/H$ oder $\mathfrak{J}/J$ ist natürlich ein Einheitsvector in der Richtung des Kraftflusses zu verstehen.

Nach Gleichung (214) erhält man

$$\mathfrak{H}_e = \Sigma \mathfrak{a} \mathfrak{J} \int \mathrm{V} d\mathfrak{s} \cdot \nabla \frac{1}{r} \cdot$$

Das Integralzeichen bezieht sich hier nur auf einen Kreisstrom und das vorn stehende Summenzeichen gibt an, dass alle Kreisströme um die einzelnen Raumelemente in Betracht zu ziehen sind.

Im Luftraume sind $\mathfrak{H}_m$ und $\mathfrak{H}_e$ überall genau gleich (im Eisenraume aber nicht). — Bei der Bildung von $\mathfrak{H}_e$ ist noch zu beachten, dass im Innern des Eisens, falls μ dort constant ist und keine eingeprägten Kräfte vorkommen, die Ströme C

sich bei der Summirung vollständig gegeneinander aufheben. Um sich davon zu überzeugen, betrachte man zwei nebeneinander liegende Raumelemente, die ein Stück der Randcurve gemeinsam haben und deren Mittelschnitte auf derselben Niveaufläche liegen. Die in der Achse gemessene Dicke der einen Schale sei $\mathfrak{a}$, die der benachbarten $\mathfrak{a}'$. Die magnetische Kraft sei $\mathfrak{H}_m$ bezw. $\mathfrak{H}_m'$. Zwischen diesen Grössen und $\mathfrak{H}_e$ bew. $\mathfrak{H}_e'$ haben wir hier wohl zu unterscheiden, da wir jetzt das Innere der Eisenmasse betrachten. Da der Magnet (von den fingirten Strömen abgesehen) nicht elektrisch durchströmt wird und auch keine eingeprägten magnetischen Kräfte vorkommen sollten, muss das Linienintegral von $\mathfrak{H}_m$ für eine geschlossene Curve verschwinden. Einen geschlossenen Linienzug, auf den wir diesen Satz anwenden wollen, erhalten wir, wenn wir die beiden Strecken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ durch zwei auf den Ansichtsflächen gezogene Linien mit einander verbinden. Die zuletzt genannten Linien stehen aber senkrecht zu $\mathfrak{H}_m$ und tragen daher zu dem Linienintegrale nichts bei. Jener Satz (der ja nur die Bedingung dafür angibt, dass $\mathfrak{H}_m$ von einem scalaren Potentiale herrühre) lehrt daher, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{H}_m = \mathfrak{a}'\mathfrak{H}_m'$ sein muss. Wenn $\varkappa$ constant ist, hat dies aber zur Folge, dass auch

$$\mathfrak{a}\mathfrak{J} = \mathfrak{a}'\mathfrak{J}' \quad \text{und daher} \quad C = C'$$

ist. Es ist also bewiesen, dass auf dem gemeinsamen Stücke der Randcurve die Kreisströme sich gerade so gegeneinander aufheben, wie dies schon früher bei der Besprechung der magnetischen Schale gefunden worden war. Wo $\varkappa$ (also wo μ) veränderlich ist oder wo eingeprägte Kräfte vorkommen, verliert diese Betrachtung ihre Gültigkeit. Das aus der Zusammenfassung aller einzelnen Kreisströme hervorgehende Stromsystem ist daher auf die Theile des Raumes, in denen die Permeabilität veränderlich ist u. s. w., bei weichen Eisenmassen also auf die Grenzschichten beschränkt.

Auch für die Aufstellung des im Luftraume gültigen Werthes für das Vectorpotential eines Magneten kann man sowohl von Gleichung (219) als von Gleichung (221) ausgehen.

Man erhält so (da $m = J$, ferner $J \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{J} \cdot a$ und $adf = dv$ zu setzen ist)

$$\mathfrak{A}_m = \int \mathrm{V}\, \mathfrak{J} \cdot \nabla \frac{1}{r} \cdot dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (224)$$

Es ist dies zwar dem Wortlaute nach der von Maxwell selbst gegebene Ausdruck für das Vectorpotential eines Magneten. Dabei verwechselte Maxwell aber die Dimensionen, insofern als er $\mathfrak{J}$ als gleichartig mit $\mathfrak{B}$ anstatt mit $\mathfrak{H}$ betrachtete. Dass nur das letztere zulässig ist, ergibt sich daraus, dass $\mathfrak{J}$ zu „freien" und nicht zu „wahren" magnetischen Massen führt und führen kann. Die Dimension von div $\mathfrak{J}$ muss daher nothwendig mit der von div $\mathfrak{H}$ übereinstimmen; also muss auch $\mathfrak{J}$ selbst eine Grösse von gleicher Art mit $\mathfrak{H}$ und nicht mit $\mathfrak{B}$ sein.

Um diesem Zusammenhange Ausdruck zu geben, schreibe ich noch die Gleichung

$$\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} = \mu_0 \int \mathrm{V}\, \mathfrak{J} \cdot \nabla \frac{1}{r} \cdot dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (225)$$

an, weil dieses $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$, obschon es von der eigenen Formel Maxwell's dem Buchstaben nach abweicht, doch das angibt, was Maxwell sonst überall unter dem Vectorpotentiale eines Magneten versteht. — Diese Verwechselungen kommen übrigens nur daher, dass der erhabene Urheber der heutigen Elektricitätslehre sich noch nicht zu der Anschauung durchgerungen hatte, dass der Permeabilität μ nothwendig auch eine physikalische Dimension zugestanden werden müsse. Wäre μ nur eine absolute Zahl, so könnte der Factor μ_0, der Wahl des magnetischen Maasssystems entsprechend, in Gleichung (225) natürlich auch gestrichen werden, wie es Maxwell thatsächlich machte.

Natürlich gilt Gleichung (225) ebenfalls nur für den Luftraum. Es wird dort, so lange es sich nur um Magnete handelt, identisch mit jenem anderen Ausdrucke für $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$, den wir in § 90 auf ganz anderem Wege abgeleitet haben (Gl. 200) und der für den ganzen Raum anwendbar ist.

Aus Gleichung (221) erhält man schliesslich, wenn das

Summenzeichen in dem bei $\mathfrak{H}_e$ bezeichneten Sinne gebraucht wird

$$\mathfrak{A}_e = \Sigma \mathfrak{a} \mathfrak{J} \int \frac{1}{r}\, d\mathfrak{s} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (226)$$

§ 98. Ponderomotorische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Kreisstrome.

Bisher handelte es sich immer nur um den Nachweis, dass man unter gewissen Voraussetzungen ein Stromsystem anzugeben vermag, von dem dasselbe magnetische Feld ausgeht wie von einem Systeme freier magnetischer Massen, oder also auch wie von einem Stahlmagneten. Die ponderomotorischen Wirkungen auf einen zweiten Magneten oder einen anderen Strom sind aber nur durch das magnetische Feld bedingt; auch in dieser ponderomotorischen Hinsicht ersetzen sich daher der Magnet und das ihm äquivalente Stromsystem — immer innerhalb der Gültigkeitsgrenzen jener Betrachtung — vollständig.

Von Wichtigkeit ist aber noch die Verfolgung der zwischen einem Magneten und einem elektrischen Strome (am einfachsten einem linearen „Kreisstrome") auftretenden ponderomotorischen Kräfte. Ersetzt man den Kreisstrom durch eine magnetische Schale, so erzeugt diese dasselbe Feld wie der Kreisstrom und sie bringt daher auch dieselben Kräfte am Magneten hervor. Nach dem Coulomb'schen Gesetze (§ 56) ist die Rückwirkung des Magneten auf die magnetische Schale der ersten Wirkung entgegengesetzt gleich. Insofern ist also das Gesetz der Action und Reaction unmittelbar erfüllt. Es entsteht aber nun noch die Frage, ob dies auch vom Kreisstrome selbst gilt, ob also mit anderen Worten auch die ponderomotorische Wirkung an dem Kreisstrome in einem gegebenen Felde äquivalent im mechanischen Sinne mit der Wirkung auf die magnetische Schale ist. Eine bejahende Antwort auf diese Frage ist natürlich von vornherein (auf Grund des Trägheitsgesetzes) zu erwarten, da im anderen Falle ein aus dem Magneten und dem fest mit ihm verbundenen Kreisstrome gebildetes System sich selbst eine Beschleunigung zu ertheilen vermöchte. Die

Behandlung der Frage hat daher für uns nur die Bedeutung einer Probe auf die Zulässigkeit der vorhergehenden Lehren, bezw. der Hypothesen, auf die sich diese stützen.

Wie seither stets in diesem Capitel denke ich mir den Magneten durch ein System magnetischer Massen ersetzt, so wie es nach der Fernwirkungslehre üblich ist und in § 56 näher beschrieben wurde. Der Raumdichte an freiem Magnetismus σ_f entspricht dann eine Raumdichte an wahrem Magnetismus $\sigma_w = \mu_0 \sigma_f$. Die erste Massenvertheilung bringt das vom Magneten ausgehende Feld hervor, die zweite bildet das Substrat für die am Magneten auftretenden ponderomotorischen Kräfte.

Für die an einem Stromelemente des Kreisstroms angreifende ponderomotorische Kraft $d\mathfrak{F}_e$ haben wir nach Gleichung (164), falls wir die Stromstärke hier mit C bezeichnen, den Ausdruck

$$d\mathfrak{F}_e = C \mathsf{V}\, d\mathfrak{s}\mathfrak{B} = C \mathsf{V}\, d\mathfrak{s}\,(\mathfrak{B}_m + \mathfrak{B}_e).$$

Die ganze Induction $\mathfrak{B}$ ist hier nämlich in die zwei Theile $\mathfrak{B}_m$ und $\mathfrak{B}_e$ zerlegt gedacht, so dass $\mathfrak{B}_m$ von dem Magneten allein und $\mathfrak{B}_e$ von dem Kreisstrome allein herrührt. Um den letzten Theil brauchen wir uns hier nicht weiter zu kümmern, da es sich jetzt nur um die Wechselwirkung zwischen Magnet und Kreisstrom und nicht um die zwischen einzelnen Theilen des Kreisstromes handelt. Nun ist $\mathfrak{B}_m = \mu_0 \mathfrak{H}_m$ und jener Theil von $\mathfrak{H}_m$, den man sich durch die freie Masse $\sigma_f dv$ für sich zu Stande gekommen denken kann, gleich $\sigma_f dv \cdot \nabla {}^1\!/_r$, wo r vom Aufpunkte aus zählt und die Operation ∇ sich auf Verschiebungen des Raumelementes dv bezieht. Setzen wir dies ein und integriren über den ganzen Raum des Magneten, so erhalten wir

$$d\mathfrak{F}_e = C \mathsf{V}\, d\mathfrak{s} \int \mu_0 \sigma_f dv \cdot \nabla \frac{1}{r} = C \mathsf{V}\, d\mathfrak{s} \int \sigma_w dv \cdot \nabla \frac{1}{r}.$$

Für die ponderomotorische Kraft $d\mathfrak{F}_m$ an einem Raumelemente dv des Magneten findet man andererseits

$$d\mathfrak{F}_m = \sigma_w dv (\mathfrak{H}_e + \mathfrak{H}_m).$$

Hier handelt es sich wieder nur um jenen Theil, der von aussen her auf den Magneten übertragen wird, also um den zu $\mathfrak{H}_e$ gehörigen. Mit denselben Bezeichnungen wie in § 95 erhalten wir dafür nach Einführung des Werthes von $\mathfrak{H}_e$ aus Gleichung (214)

$$d\mathfrak{F}_m = \sigma_w dv C \int \mathsf{V}\, d\mathfrak{s} \cdot \nabla \frac{1}{r},$$

wobei sich jetzt die Operation ∇ auf Verschiebungen des Elementes $d\mathfrak{s}$ bezieht, also $\nabla {}^1/_r$ das Negative des Werthes bedeutet, den es in der Formel für $d\mathfrak{F}_e$ hatte.

Vergleichen wir die beiden Formeln für $d\mathfrak{F}_e$ und $d\mathfrak{F}_m$ mit einander, so bezieht sich die Integration im einen Falle auf den Stromleiter, im anderen Falle auf das Volumen des Magneten. Man könnte nun versucht sein, die Integralzeichen ganz zu löschen und in dem verbleibenden Differentialausdruck die Kraft zwischen der magnetischen Masse $\sigma_w dv$ und dem Stromelemente $C d\mathfrak{s}$ zu erblicken. Man würde dann unter Berücksichtigung der vorhergehenden Bemerkung über das Vorzeichen von $\nabla {}^1/_r$ finden, dass $d\mathfrak{F}_m$ das Negative von $d\mathfrak{F}_e$ ist. Trotzdem aber würde zwischen den beiden Elementen das Gesetz der Action und Reaction nicht erfüllt sein, denn beide Kräfte stehen senkrecht zu der durch $\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{s}$ gelegten Ebene, bilden also ein Kräftepaar mit einander. Wäre also ein System physikalisch realisirbar, das nur ein Stromelement und einen Magnetpol enthielte, so würde sich dieses selbst in beschleunigte Rotation versetzen können, — im Widerspruche mit dem Gesetze von der Erhaltung der Energie.

Einerseits ist nun ein solches System physikalisch unmöglich und andererseits sind wir auch gar nicht zu einer solchen weiteren Zerlegung in einzelne Elemente berechtigt. Die einzige Bedingung, die erfüllt sein muss, besteht vielmehr darin, dass das System aller Kräfte $d\mathfrak{F}_e$ am Stromleiter im Gleichgewichte mit dem Systeme der Kräfte $d\mathfrak{F}_m$ am Magneten ist. Um uns hiervon zu überzeugen, können wir uns entweder des Satzes vom statischen Momente oder des

Princips der virtuellen Geschwindigkeiten bedienen. Wir wollen den ersten Satz wählen.

Von einem beliebig gelegenen Momentenpunkte O aus ziehe man den Radiusvector $\mathfrak{R}$ nach $d\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{R}'$ nach dv; dann ist

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} + \mathfrak{r}.$$

Die geometrische Summe der Momente (vgl. § 13) der Kräfte $d\mathfrak{F}_e$ für den ganzen Stromleiter ist dann gleich

$$\int \mathrm{V}\,\mathfrak{R}\,d\mathfrak{F}_e = C\int\int \sigma_w dv \mathrm{V}\,\mathfrak{R}\,\mathrm{V}\,d\mathfrak{s}\cdot\nabla\frac{1}{r}$$

und ebenso die Momentensumme für die Kräfte $d\mathfrak{F}_m$

$$\int \mathrm{V}\,\mathfrak{R}'\,d\mathfrak{F}_m = C\int\int \sigma_w dv \mathrm{V}\,\mathfrak{R}'\,\mathrm{V}\,d\mathfrak{s}\cdot\nabla'\frac{1}{r}.$$

Um anzudeuten, dass $\nabla{}^1\!/_r$ im letzten Ausdrucke sich von dem im vorhergehenden durch das Vorzeichen unterscheidet, wurde ein Accent beigesetzt.

Ich bilde jetzt die Momentensumme aller Kräfte. Wenn das Gesetz von der Action und Reaction (also auch das Energieprincip) zwischen Magnet und Kreisstrom erfüllt sein soll, muss diese Summe für jede beliebige Lage des Momentenpunktes O verschwinden. Addirt man die beiden gefundenen Werthe und berücksichtigt den vorher für $\mathfrak{R}'$ aufgestellten Ausdruck, so bleibt nach Wegheben des ersten Werthes gegen den ihm entgegengesetzt gleichen Bestandtheil des zweiten für die Momentensumme aller Kräfte der Ausdruck übrig

$$C\int\int \sigma_w dv \mathrm{V}\,\mathfrak{r}\,\mathrm{V}\,d\mathfrak{s}\cdot\nabla'\frac{1}{r}.$$

Die einzelnen Elemente dieses Integrals verschwinden für sich genommen keineswegs. Um zu beweisen, dass ihre Summe verschwindet, führen wir vorläufig nur die Integration nach $d\mathfrak{s}$ aus, nachdem der Differentialausdruck etwas umgeformt ist. Da $\nabla{}^1\!/_r = -\,\mathfrak{r}/r^3$ und daher $\nabla'\frac{1}{r} = \mathfrak{r}/r^3$, erhalten wir für diesen

$$\mathrm{V}\,\mathfrak{r}\,\mathrm{V}\,d\mathfrak{s}\nabla'\frac{1}{r} = \frac{1}{r^3}\mathrm{V}\,\mathfrak{r}\,\mathrm{V}\,d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}.$$

Während nun der Anfangspunkt von $\mathfrak{r}$ die Curvenelemente $d\mathfrak{s}$ durchläuft, denken wir uns zur besseren Veranschaulichung gleichzeitig mit $\mathfrak{r}$ einen starren Körper um den festen Endpunkt der $\mathfrak{r}$ (nämlich den Mittelpunkt des Raumelementes dv) gedreht, und zwar so, dass $\mathfrak{r}$ eine in diesem starren Körper der Richtung nach festliegende Linie bildet, um die selbst der Körper sich nicht dreht. Die Drehachsen sollen vielmehr stets senkrecht zu $\mathfrak{r}$ stehen.

Während der Anfangspunkt von $\mathfrak{r}$ um $d\mathfrak{s}$ weiter rückt, führt der erwähnte starre Körper eine unendlich kleine Drehung um den festen Endpunkt der $\mathfrak{r}$ aus, die als Vectorgrösse mit $d\mathfrak{u}$ bezeichnet sei. Nach Gleichung (19) ist der von irgend einem Punkte des starren Körpers in derselben Zeit beschriebene Weg $d\mathfrak{w}$

$$d\mathfrak{w} = \mathrm{V}\, d\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r}',$$

wobei $\mathfrak{r}'$ vom Drehpunkte aus gezählt ist. — Nun erkennt man aber leicht, dass

$$d\mathfrak{u} = \frac{1}{r^2}\mathrm{V}\, d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}$$

ist, denn zunächst steht der angegebene Werth senkrecht zugleich auf $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r} + d\mathfrak{s}$, entspricht also der Richtung nach der Drehachse für die Bewegung aus der einen Lage in die folgende und dann ist der Tensor des Vectorproducts gleich der doppelten Fläche des zwischen $\mathfrak{r}$, $d\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{r} + d\mathfrak{s}$ eingeschlossenen Dreiecks und liefert also nach Division durch r^2 die Grösse des zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r} + d\mathfrak{s}$ eingeschlossenen Winkels, d. h. den Tensor von $d\mathfrak{u}$. Auch dem Vorzeichen nach stimmen beide Seiten überein; da es hierauf aber jetzt gar nicht ankommt, indem selbst ein Vorzeichenfehler an dieser Stelle keinen Schaden anrichten könnte, sei dies nicht weiter nachgewiesen.

Der umzuformende Differentialausdruck geht dann über in

$$\mathrm{V}\,\mathfrak{r}\,\mathrm{V}\, d\mathfrak{s}\,\nabla'\frac{1}{r} = \mathrm{V}\frac{\mathfrak{r}}{r}\, d\mathfrak{u} = \mathrm{V}\, d\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{r}'.$$

Im letzten Ausdrucke ist an Stelle von $-\mathfrak{r}/r$ zur Abkürzung $\mathfrak{r}'$ gesetzt; dieses $\mathfrak{r}'$ ist also ein Einheitsvector, der vom Volumenelemente dv aus gezählt und in jedem Augenblicke nach dem Stromelemente $d\mathfrak{s}$ hingerichtet ist. Der Endpunkt von $\mathfrak{r}'$ fällt demnach stets mit demselben materiellen Punkte des sich mit $\mathfrak{r}$ bewegenden starren Körpers zusammen. Verstehen wir jetzt unter $d\mathfrak{w}$ speciell das von diesem materiellen Punkte beschriebene Wegeelement, so erhalten wir schliesslich für den umzuformenden Differentialausdruck den einfachen Werth $d\mathfrak{w}$ und für die Momentensumme aller am Magneten und am Kreisstrome angreifenden Kräfte

$$C\int \sigma_w dv \int d\mathfrak{w}.$$

Nun ist $\int d\mathfrak{w}$ die geometrische Summe der von dem vorher bezeichneten materiellen Punkte beschriebenen Wegeelemente für einen ganzen Umlauf längs des Kreisstromes. Nach dem Umlaufe kommt der Punkt aber wieder auf seinen früheren Platz zurück und daher ist $\int d\mathfrak{w}$ gleich Null.

Der verlangte Beweis, dass das Gesetz der Action und Reaction zwischen dem Magneten und dem Kreisstrome im Ganzen erfüllt ist, ist hiermit erbracht, denn aus der Betrachtung geht hervor, dass die Momentensumme aller Kräfte für jeden beliebigen Momentenpunkt verschwindet.

Betrachtet man die ponderomotorische Wechselwirkung zwischen dem Magneten und einer magnetischen Schale, die den Kreisstrom ersetzt, so ist zwischen diesen beiden das Gesetz der Action und Reaction schon von vornherein nach dem Coulomb'schen Gesetze erfüllt. Verbindet man hiermit das soeben gefundene Resultat, so folgt ferner, dass auch die ponderomotorischen Kräfte an dem Kreisstrome und der ihn in Bezug auf die Fernwirkungen ersetzenden magnetischen Schale im Sinne der Mechanik der starren Körper einander äquivalent sind. — Umgekehrt hätten wir dies auch direct nachweisen und dann hieraus die Folgerung ziehen können, dass auch zwischen dem Kreisstrome und dem Magneten Action und Reaction im Gleichgewichte mit einander stehen.

§ 99. Zusammenstellung der Dimensionen der in diesem Abschnitte neu eingeführten Grössen.

Im Anschlusse an die in § 70 abgedruckte Tafel gebe ich hier in Form einer Fortsetzung dieser Tafel die Dimensionen der neu eingeführten Grössen an:

	Ausgedrückt in K	Ausgedrückt in μ	Zurückgeführt auf die 3 Grundeinheiten.
Vectorpotential $\mathfrak{A}$ elektrischer Ströme oder von Magneten	$K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$	$\mu^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	
Vectorpotential $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$	$K^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}}$	$\mu^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$	
Intensität der Magnetisirung $\mathfrak{J}$ (wie $\mathfrak{H}$)	$K^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-2}$	$\mu^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$	
Magnetische Susceptibilät $\varkappa$	0.	0.	

Vierter Abschnitt.

Die Energiebeziehungen im elektromagnetischen Felde zwischen ruhenden Leitern.

Erstes Capitel.

Einfache Anwendungen des Vectorpotentials.

§ 100. Begrenzte Anwendbarkeit der Potentialtheorie.

Die Potentiale, die scalaren sowohl wie die Vectorpotentiale, sind ihrer ursprünglichen Definition nach Grössen, die durch Ausführung von Integrationen über den ganzen betrachteten Raum gewonnen werden. Bei ihrer Anwendung gilt daher als stillschweigende Voraussetzung, dass die zeitliche Aenderung aller bei dem zu behandelnden Probleme vorkommenden Grössen nur langsam im Vergleiche zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Störungen in jenem Raume erfolge. Denn nur in diesem Falle sind wir z. B. berechtigt, jenen Zustand des Feldes im Aufpunkte, der durch die Grössen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ characterisirt ist, als durch die augenblicklichen Werthe der Grössen $\mathfrak{c}$ und div $\mathfrak{H}$ in allen anderen Raumelementen eindeutig bedingt anzusehen. Bei schnelleren Aenderungen des Feldes wird dagegen der Vector $\mathfrak{H}$ im Aufpunkte nicht durch die augenblicklichen Werthe von $\mathfrak{c}$ und div $\mathfrak{H}$ im ganzen übrigen Felde bestimmt sein, sondern es kommen auch jene Werthe dieser Grössen in Betracht, die den augenblicklichen unmittelbar vorhergingen. Nur dann, wenn diese Grössen sich innerhalb der Zeit, die zur Fortpflanzung einer elektromagnetischen Welle bis zum Aufpunkte von irgend einer Stelle des Feldes aus erforderlich ist, nicht merklich änderten, können wir genau genug für die Berechnung von $\mathfrak{H}$, also auch für die Berechnung des Vectorpotentials $\mathfrak{A}$ die zur selben Zeit genommenen Werthe jener Grössen einsetzen.

Diese Betrachtung setzt der Anwendung der Potentiale, so lange wenigstens als man ihre ursprüngliche Definition beibehält, unübersteigliche Schranken; namentlich für die Behandlung der elektromagnetischen Wellenflächen selbst sind sie nicht mehr verwendbar.

Man kann diese Schwierigkeit allerdings dadurch umgehen, dass man die Definition dieser Grössen ändert, dass man also unter $\mathfrak{A}$ z. B. überall dort, wo μ constant ist, jene Grösse, deren curl den Vector $\mathfrak{H}$, oder unter $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ im Sinne von § 90 jene Grösse versteht, deren curl in jedem Augenblicke und an jeder Stelle des Feldes den Vector $\mathfrak{B}$ ergibt. Durch diese Aenderung verlieren diese Grössen aber ihre Eigenschaft als Potentiale im eigentlichen Sinne des Wortes. Namentlich erfüllen sie dann nicht mehr die Laplace'sche Differentialgleichung. Gerade auf dieser Eigenschaft, die man bei der Aenderung der Definition opfern müsste, beruht aber der Nutzen, den die Potentiale für die analytische Behandlung der Probleme gewähren. Es ist daher ziemlich zwecklos, sie auch in solchen Fällen noch beizubehalten.

Die Elimination des Vectorpotentials aus den fundamentalen Gleichungen der Maxwell'schen Theorie, die Heaviside und nach ihm Hertz vollzogen, indem sie die hier als zweite Hauptgleichung bezeichnete Beziehung an die Stelle der bei Maxwell auftretenden, die das Vectorpotential einschloss, setzten, ist wegen des soeben erörterten Zusammenhanges als eine wissenschaftliche That von der grössten Bedeutung zu bezeichnen. — Unverwehrt bleibt es ja freilich immerhin, neben den Grössen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ auch die zu ihnen gehörigen Stammgrössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ beizubehalten. Man darf sie dann nur nicht fernerhin, wo es sich um elektromagnetische Wellen handelt, als Potentiale bezeichnen, denn ein Potential ist seinem Begriffe nach eine Grösse, bei der man von einer

Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht wohl sprechen kann; man sollte diese Beziehung vielmehr stets für jene Grössen reserviren, die die Laplace'sche Gleichung erfüllen. Ich glaube aber, obschon unter diesen Voraussetzungen gegen die Beibehaltung der Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ nichts eingewendet werden kann, dass Heaviside Recht hat, wenn er die in diesem Sinne geänderten Begriffe als Schmarotzer erklärt, von denen kein Gewinn zu erhoffen ist. Es wird sich daher mehr empfehlen, entweder gar keinen Gebrauch von ihnen in diesem Sinne zu machen, oder ihnen doch wenigstens jene dominirende Rolle, die sie aus der classischen Theorie der Elektrodynamik ererbt hatten, nicht ferner einzuräumen.

In diesem Abschnitte werde ich indessen nur langsam veränderliche Feldzustände in Betracht ziehen, auf die sich diese Bemerkungen nicht beziehen, so dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ in ihrer ursprünglichen Bedeutung als Vectorpotentiale beibehalten werden können.

§ 101. Ableitung der in ruhenden Leitern inducirten elektrischen Kraft aus dem Vectorpotentiale.

Mit Berücksichtigung der eingeprägten elektrischen Kräfte $\mathfrak{E}_e$ wird die zweite Hauptgleichung in der Form (175) S. 214

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = -\mathfrak{s} = -\dot{\mathfrak{B}}$$

dargestellt. Setzen wir nun nach Gleichung (196)

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}},$$

so geht die zweite Hauptgleichung über in

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = -\operatorname{curl} \dot{\mathfrak{A}}_{\text{Maxw.}}.$$

Die durch den Punkt angedeutete Differentiation d/dt nach der Zeit konnte, wie man leicht einsieht, mit der sich ausschliesslich auf den Raum beziehenden Differentialoperation curl den Platz wechseln. Durch Integration erhalten wir aus der letzten Gleichung.

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_e - \dot{\mathfrak{A}}_{\text{Maxw.}} + \mathfrak{K}$$

wobei $\mathfrak{K}$ einen Vector bedeutet, von dem wir zunächst nur wissen, dass sein curl verschwindet und von dem wir ebenso wie von den übrigen in der Gleichung vorkommenden Gliedern eine stetige Vertheilung im Raume voraussetzen dürfen. Das sind aber die Bedingungen dafür, dass sich $\mathfrak{K}$ von einem scalaren Potentiale Φ ableiten lässt. Wir setzen also

$$\mathfrak{K} = -\nabla\Phi$$

und führen, nachdem wir dies eingeführt haben, an der vorigen Gleichung die Operation div aus. Unter Beachtung von Gleichung (197) erhalten wir dann

$$\operatorname{div}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = -\nabla^2\Phi.$$

Nun war nach § 39 mit den in § 77 gebrauchten Bezeichnungen $\operatorname{div}\mathfrak{E}_s = 4\pi\varrho_f$. Nach Abzug der eingeprägten Kräfte $\mathfrak{E}_e$ enthält $\mathfrak{E}$ nur noch die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}_s$ und die durch magnetische Ströme inducirte, die wir jetzt ermitteln und mit $\mathfrak{E}_m$ bezeichnen wollen. Ebenso wie ein elektrischer Strom nur solenoidal vertheilte magnetische kann aber, nach dem Heaviside'schen Princip, eine magnetische Stromvertheilung auch nur elektrische Kräfte von solenoidaler Vertheilung hervorbringen. Auch abgesehen hiervon ist indessen die nachfolgende Betrachtung schon durch die Definition von $\mathfrak{E}_s$ gerechtfertigt. Daher ist div $(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e)$ gleichbedeutend mit div $\mathfrak{E}_s$. Man hat also

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\varrho_f.$$

Diese Gleichung gilt für den ganzen betrachteten Raum und spricht daher aus, dass Φ das elektrostatische Potential, $\mathfrak{K}$ also die elektrostatische Kraft $\mathfrak{E}_s$ bedeutet. Wir finden demnach

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_e + \mathfrak{E}_s - \dot{\mathfrak{A}}_{\text{Maxw.}}$$

oder

$$\mathfrak{E}_m = -\dot{\mathfrak{A}}_{\text{Maxw.}} \quad \text{. . . . . (227)}$$

Ueberall im Luftraume kann dafür auch

$$\mathfrak{E}_m = -\mu_0\dot{\mathfrak{A}} \quad \text{. . . . . (228)}$$

gesetzt werden.

Die Gleichungen (227) und (228) sind es, die bei der ursprünglichen Darstellung Maxwell's an die Stelle der zweiten Hauptgleichung treten und aus denen diese durch Elimination von $\mathfrak{A}$ mit Hülfe der Beziehung $\mathfrak{B} = \text{curl}\, \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ wieder rückwärts abgeleitet werden kann.

§ 102. Das Linienintegral des Vectorpotentials.

Das über den Bogen $P_0 P_1$ einer Curve, die wir uns etwa als Bahn eines linearen elektrischen Stromes vorstellen können, erstreckte Linienintegral

$$\int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{E}_m d\mathfrak{s}$$

gibt eine scalare Grösse an, die mit einem Potentialunterschiede der beiden Punkte vergleichbar, wenn auch nicht in jeder Hinsicht dadurch ersetzbar ist. Dieser Werth heisst die in dem Bogen $P_0 P_1$ inducirte elektromotorische Kraft und tritt in die nach dem Ohm'schen Gesetze, wenn wir es auf den linearen Leiter in der Form eines Integralgesetzes anwenden (vgl. § 61), anzuschreibende Gleichung als Summand zu dem Potentialunterschiede bezw. zu dem Linienintegrale der eingeprägten Kräfte hinzu.

Aus Gleichung (227) erhalten wir

$$\int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{E}_m d\mathfrak{s} = -\int_{P_0}^{P_1} \dot{\mathfrak{A}}_{\text{Maxw.}} d\mathfrak{s} = -\frac{d}{dt}\int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \cdot d\mathfrak{s} \quad (229)$$

oder auch nach Gleichung (228) für den Luftraum

$$\int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{E}_m d\mathfrak{s} = -\mu_0 \frac{d}{dt}\int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{A} d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (230)$$

Wir werden damit auf den Begriff des Linienintegrals des Vectorpotentials geführt, das besonders für den Fall von Wichtigkeit ist, dass sich die Integration über eine geschlossene Curve erstreckt, die man als Bahn eines linearen Leiters betrachten kann.

Gerade in diesem Falle lässt sich aber das Linienintegral von $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ nach dem Stokes'schen Satze Gleichung (90) S. 70 durch ein Oberflächenintegral ersetzen. Man erhält

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}\, d\mathfrak{s} = \int \text{curl}\, \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \cdot \mathfrak{N} df = \int \mathfrak{B} \mathfrak{N} df \quad . \quad (231)$$

und daher

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{E}_m d\mathfrak{s} = -\int \dot{\mathfrak{B}} \mathfrak{N} df = -\int \mathfrak{g} \mathfrak{N} df. \quad . \quad . \quad (232)$$

Damit werden wir aber nur wieder auf das Inductionsgesetz zurückgeführt, wonach die in einem geschlossenen linearen Leiter inducirte elektromotorische Kraft gleich dem magnetischen Strome durch eine Fläche ist, deren Randcurve der lineare Leiter bildet.

§ 103. Der Selbstinductions-Coefficient.

Im Luftraume sei ein linearer geschlossener Leiter gegeben, in dessen Strombahn eingeprägte Kräfte (z. B. hydroelektrische, wenn eine galvanische Zelle eingeschaltet ist) auftreten, die einen Strom darin unterhalten. Entweder die eingeprägten Kräfte oder der Widerstand des Leiters seien veränderlich, so dass sich auch die Stromintensität ändert, in der Art jedoch, dass diese Aenderungen im Sinne von § 100 als langsame betrachtet werden können.

Das Linienintegral des Vectorpotentials $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ oder das μ_0-fache des Linienintegrals von $\mathfrak{A}$ ist dann in jedem Augenblicke nach Gleichung (231) gleich der Zahl der Kraftlinien durch eine von dem linearen Leiter begrenzte Fläche, und andererseits nach der Definition von $\mathfrak{A}$ proportional der Stromstärke im linearen Leiter zu der gegebenen Zeit. Bezeichnen wir diese Stromstärke mit C und setzen wir

$$\mu_0 \int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \int \mathfrak{B} \mathfrak{N} df = C \cdot L. \quad . \quad . \quad . \quad (233)$$

so bedeutet L eine scalare Grösse, die nur noch von der geometrischen Configuration der Strombahn (bezw. wenn an die Stelle von Luft irgend ein anderes Medium von constanter Permeabilität tritt, auch von dem Werthe dieser Permeabilität) abhängt. Diese Grösse heisst der Selbstinductionscoefficient des linearen Leiters.

Nach Gleichung (176) S. 215 ist für unseren Fall

$$\mathfrak{A} = C \int_{P_0}^{P_0} \frac{d\mathfrak{s}}{r},$$

daher

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{A}_{\mathrm{Maxw.}} \, d\mathfrak{s} = \mu_0 \int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{A} \, d\mathfrak{s} = \mu_0 C \int_{P_0}^{P_0} d\mathfrak{s} \int_{P_0}^{P_0} \frac{d\mathfrak{s}}{r}.$$

In abgekürzter Schreibweise lässt sich dieses Doppelintegral durch ein einziges ersetzen, wenn man für $d\mathfrak{s}$ einmal die frühere Bezeichnung beibehält und sie für das andere Mal durch $d\mathfrak{s}'$ ersetzt. Man hat dann noch eine zweite Definitionsgleichung für L in der sich aus Gleichung (233) ergebenden Beziehung

$$L = \mu_0 \cdot \int \frac{d\mathfrak{s} \, d\mathfrak{s}'}{r} \quad \text{. . . . . .} \quad (234)$$

Nach der Ableitung der Formel kommt jede Combination zwischen zwei Linienelementen doppelt in der Summe vor, so dass ein bestimmtes Element einmal als $d\mathfrak{s}$ und das andere Mal als $d\mathfrak{s}'$ auftritt und umgekehrt das andere. Will man jede Combination nur einmal bei der Summirung nehmen, so ist dies besonders anzugeben, in diesem Falle aber der Factor 2 vor das Integralzeichen zu setzen.

Von dem Factor μ_0 abgesehen, ist dies der von der Fernwirkungstheorie gegebene Ausdruck. Das Hinzutreten von μ_0 zeigt uns aber, dass der Selbstinductionscoefficient keineswegs, wie in dieser gelehrt wird, die Dimension einer Länge hat und daher auch nicht in *cm* (bezw. in Erdquadranten nach dem „praktischen" Maasssysteme) ausgemessen werden kann. Die wahre Dimension von L ist vielmehr

$$\mu L \text{ oder } K^{-1} L^{-1} T^2.$$

Für die elektromotorische Kraft der Selbstinduction in dem geschlossenen linearen Leiter erhalten wir hier nach Gleichung (230)

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{E}_m d\mathfrak{s} = - L \frac{dC}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (235)$$

Der Selbstinductionscoefficient L hat stets einen positiven Werth; er kann zwar bei besonderer Form der Strombahn nahezu Null, aber niemals negativ werden. Aus der durch Gleichung (234) in (von μ_0 abgesehen) rein geometrischer Form gegebenen Definition von L lässt sich dies nicht ohne Weiteres erkennen. Aus Gleichung (233) folgt es, wenn man auf die Beziehung zwischen der Normalenrichtung und der Stromrichtung (Vorzeichen von C) achtet. Am einfachsten ergibt sich dies aber aus der jetzt einzuschaltenden Betrachtung über die Energie eines einfachen Kreisstromes.

§ 104. Energie eines einfachen Kreisstromes.

Unter einem „einfachen" Kreisstrome verstehe ich einen in sich geschlossenen linearen Strom von beliebig gestalteter Strombahn, die von einem Medium von constanter Permeabilität umgeben ist, also einen solchen Strom, wie er schon im vorigen § betrachtet war.

Im Allgemeinen ist die Energie eines solchen (ruhenden) Kreisstromes in zwei Theile zu spalten, in die magnetische und in die elektrische Energie. Denken wir uns nämlich den Kreisstrom durch eine eingeprägte Kraft unterhalten, die an einer bestimmten Stelle in die Strombahn eingeschaltet ist (etwa galvanisches Element), so entstehen freie elektrische Ladungen und in deren Folge ein elektrischer Kraftfluss, der zu einem elektrostatischen Potentiale gehört. Nur hierdurch wird der Strom dauernd aufrecht erhalten. Dem elektrostatischen Felde entspricht aber eine Energie, die sich theils auf den Luftraum, theils auf die Strombahn selbst vertheilt. Der letzte Theil ist es, dessen fortwährender Zerfall den elektrischen Leitungsstrom ausmacht und der daher durch die Arbeitsleistung der eingeprägten Kraft fortwährend ergänzt werden muss. Die Zuführung dieses Energieumsatzes zur Verbrauchsstelle erfolgt durch die Vermittelung des elektrostatischen und des magnetischen Zwangszustandes im Felde.

Wenn man von der Energie eines Stromes redet, denkt man aber meistens weder an den Energieumsatz, der sich durch die Joule'sche Wärme kundgibt, noch überhaupt an die elektrostatische Energie des gesammten Feldes. Die Joule'sche Wärme, die sich etwa in einer Minute entwickelt, stellt zwar einen verhältnissmässig bedeutenden Energiebetrag dar; es handelt sich aber hier um einen Betrag, der erst durch Multiplication mit einer Zeit gewonnen wird, der also nicht in Betracht kommt, wenn wir den augenblicklichen Energieinhalt feststellen wollen. Die elektrostatische Energie in einem gegebenen Augenblicke ist aber meist nur von geringer Grösse im Verhältnisse zu der magnetischen Energie, die man deshalb gewöhnlich allein als die Stromenergie bezeichnet. — Eine Ausnahme von diesem Grössenverhältnisse beider Energien tritt jedoch ein, wenn die Strombahn aus einem schlechten Leiter gebildet wird. Um einen Strom von bestimmter Stärke, also auch ein magnetisches Feld von gegebener Grösse zu erzielen, bedürfen wir hier viel grösserer elektrischer Kräfte als bei einem guten Leiter. Die Energie des elektrostatischen Zwangszustandes wächst daher und zwar im quadratischen Verhältnisse mit dem Widerstande gegenüber der constanten magnetischen Energie an.

Von solchen Fällen sehe ich indessen hier ab und verstehe, wie üblich, unter der Energie des Stromes ausschliesslich die Energie des von ihm erzeugten magnetischen Feldes. Um die elektrostatische Energie auch thatsächlich möglichst aus dem zu behandelnden Probleme auszuschliessen, kann man übrigens annehmen, dass die den Strom unterhaltende eingeprägte Kraft nicht auf eine kurze Strecke concentrirt, sondern dass sie über die ganze Strombahn vertheilt ist. Bei passender

Vertheilung kommt im äusseren Medium überhaupt kein elektrostatischer Zwang mehr zu Stande.

Nach Gleichung (129) S. 123 erhalten wir für die Energie T des magnetischen Feldes

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{B}\mathfrak{H}\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (236)$$

wobei die Integration über den ganzen Raum auszudehnen ist.

Dieser Ausdruck lässt aber eine wichtige Umformung zu. Man kann nämlich von ihm unmittelbar zu jenem Werthe für die Energie des Kreisstromes gelangen, der von der Fernwirkungstheorie dafür angegeben wird. Zu diesem Zwecke drücke man zunächst $\mathfrak{B}$ im Vectorpotentiale aus, setze also $\mathfrak{B} = \text{curl}\,\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$. Dann wende man Gleichung (81) S. 62 an, wonach

$$\mathfrak{B}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\,\text{curl}\,\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} = \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \cdot \text{curl}\,\mathfrak{H} + \text{div}\,V\,\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}\mathfrak{H}.$$

Hieraus ergibt sich aber

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}\,\text{curl}\,\mathfrak{H}\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (237)$$

Auf der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung stand ja allerdings noch das Glied $\text{div}\,V\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \cdot \mathfrak{H}$ und im Einzelnen ist daher $\mathfrak{H}\,\text{curl}\,\mathfrak{A}$ keineswegs durch $\mathfrak{A}\,\text{curl}\,\mathfrak{H}$ zu ersetzen. Bei der Integration über den ganzen Raum fällt dies aber fort. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{B}$ irgend einen im Raum vertheilten Vector, so ist das über den ganzen Raum, in dem $\mathfrak{B}$ überhaupt vorkommt, erstreckte Integral

$$\int \text{div}\,\mathfrak{B}\,dv$$

stets gleich Null. Jeder Quelle irgend einer Kraft- oder Stromlinie $\mathfrak{B}$ muss in dem ganzen Raume auch eine entsprechende Versickerung gegenüberstehen, so dass die Gesammtsumme verschwindet. Es ist das ungefähr dasselbe, als wenn man sagt, dass dem Meere ebensoviel Wasser durch die Ströme, den Regen u. s. w. wieder zugeführt wird, als ihm durch Verdunstung entzogen wurde. — Abgesehen davon, geht dies aber auch aus Gl. (101) sofort hervor.

Im vorliegenden Falle kann für $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ der einfachere Werth $\mu_0\mathfrak{A}$ gesetzt werden, und für curl $\mathfrak{H}$ führen wir seinen Werth aus der ersten Hauptgleichung (Gl. 143, 153, 157, 174) ein. Wir erhalten dann

$$T = \frac{1}{2}\mu_0\int \mathfrak{A}\mathfrak{c}\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (238)$$

Denken wir uns die Stärke des Kreisstromes nur langsam veränderlich, so kommen die Verschiebungsströme im Dielektricum gegenüber dem Leitungsstrome im linearen Leiter nicht in Betracht. Wir können sie daher bei der Berechnung von T vernachlässigen und für $\mathfrak{c}dv$ wieder $Cd\mathfrak{s}$ setzen. Alle Volumenelemente, die nicht zu dem Leiter selbst gehören, tragen zu dem Werthe von T in Gl. (238) nichts bei. Damit geht T über in

$$T = \frac{1}{2}\mu_0 C\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{A}d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (239)$$

Das Linienintegral des Vectorpotentials lässt sich nun noch durch den Selbstinductionscoefficienten nach Gl. (233) ersetzen, so dass schliesslich

$$T = \frac{1}{2}C^2L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (240)$$

ist. Da $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ überall gleichgerichtet sind, muss T nach Gl. (236) nothwendig positiv sein. Aus Gl. (240) folgt dann weiter, dass auch L immer nur einen positiven Werth annehmen kann, worauf schon am Schlusse des vorigen § hingewiesen wurde.

Die Berechnung der Energie nach Gl. (237) oder der daraus abgeleiteten Gl. (240) führt zwar zu demselben Werthe wie Gl. (236). Die Energie ist aber in beiden Fällen in durchaus verschiedener Weise über die einzelnen Raumelemente vertheilt. Nach der Fernwirkungstheorie, die sich der Form (240) bedient, ist die Strombahn selbst der Sitz der Energie des Stromes; nach der Maxwell'schen Theorie vertheilt sie sich dagegen über das ganze magnetische Feld des Stromes.

§ 105. Differentialgleichung für einen einfachen Kreisstrom.

Die eingeprägte elektromotorische Kraft, also das Linienintegral der eingeprägten elektrischen Kräfte für die ganze geschlossene Strombahn sei jetzt mit E bezeichnet. Die inducirte elektromotorische Kraft wird durch Gl. (235) angegeben. Nach dem Ohm'schen Gesetze besteht dann für die Intensität des Kreisstromes C, die sich mit der Zeit langsam (im Sinne von § 100) ändern mag, die Differentialgleichung

$$E - L\frac{dC}{dt} = CR \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (241)$$

Sie lässt sich, wenn wir E und R als constant betrachten, leicht integriren und liefert

$$C = \frac{E}{R} - Ke^{-\frac{R}{L}\cdot t} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (242)$$

K ist die Integrationsconstante. Soll die Gleichung das allmähliche Anschwellen des Stromes nach dem Schliessen der Strombahn darstellen und rechnen wir die Zeit t vom Beginne an, so muss die Constante K gleich E/R gesetzt werden, damit für $t = 0$ die Intensität $C = 0$ wird. Wir haben dann

$$C = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (243)$$

Der Bruch L/R hat die Dimension einer Zeit. Man nennt diesen Werth die Zeitconstante des Stromkreises. Bezeichnen wir sie mit τ, so ist auch

$$C = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (244)$$

Um den Verlauf des Oeffnungsstroms analytisch darzustellen, muss man Gl. (241) unter der Voraussetzung integriren, dass R veränderlich ist (nämlich während des Oeffnens schnell anwächst). Auch dies lässt sich leicht durchführen.

§ 106. Selbstinductionscoefficient beim Vorkommen von Eisen im Felde.

Auch in diesem Falle lässt sich die Energie des Kreisstromes durch Gl. (237) darstellen. Wir dürfen aber $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ dann nicht mehr gleich $\mu_0 \mathfrak{A}$ setzen, sondern müssen darunter den in Gl. (200) S. 231 ermittelten Werth verstehen. An die Stelle von Gl. (239) tritt daher hier

$$T = \frac{1}{2} C \int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} d\mathfrak{s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (245)$$

Auch jetzt steht es uns frei, den Selbstinductionscoefficienten L, wie in § 103, durch die Gleichung

$$L = \frac{1}{C} \int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} d\mathfrak{s}$$

zu definiren und die Energie damit gleich

$$T = \frac{1}{2} C^2 L$$

zu setzen. Hier hat aber L eine ganz veränderte Bedeutung; namentlich wird es nicht mehr durch den in Gl. (234) angegebenen Werth dargestellt. Im Allgemeinen ist es nämlich nicht mehr von der Stromstärke unabhängig. Dies trifft vielmehr nur dann noch zu, wenn in den Eisenmassen (oder überhaupt in jenen Theilen des Feldes, wo die Permeabilität verschieden von μ_0 ist) erstens keine eingeprägten Kräfte $\mathfrak{H}_i$ vorkommen (absolut weiches Eisen) und zweitens die Permeabilität an jedem Orte des Feldes ihren Werth unabhängig von der wechselnden Feldstärke unverändert behält. In der Natur trifft es also überhaupt eigentlich niemals zu.

Hierdurch verliert der Begriff des Selbstinductionscoefficienten jeden Werth für die Behandlung von Problemen, bei denen Eisenmassen ins Spiel kommen. An Stelle von Gl. (235) hätte man die elektromotorische Kraft der Selbstinduction

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{E}_m d\mathfrak{s} = -\frac{d(LC)}{dt} = -L\frac{dC}{dt} - C\frac{dL}{dt} \quad . \quad . \quad (246)$$

zu setzen; anstatt dessen operirt man aber von vornherein einfacher mit dem magnetischen Strome durch die von dem linearen Leiter begrenzte Fläche.

§ 107. Condensator im Stromkreise.

Bei den vorhergehenden Betrachtungen war stets angenommen worden, dass sich der lineare Strom C in einer geschlossenen Leiterbahn bewege und dass die daneben auftretenden Verschiebungsströme diesem gegenüber vernachlässigt werden dürften. Jetzt betrachte ich dagegen eine offene Leiterbahn, die an beiden Enden entweder in die sich gegenüber stehenden Platten eines Condensators oder überhaupt in zwei leitende Körper (etwa in zwei Metallkugeln) von grösserer Oberfläche ausmündet, so dass der Leitungsstrom erst durch den Verschiebungsstrom im Dielektricum zwischen diesen Körpern geschlossen wird. Der Verschiebungsstrom rückt dadurch in einen gleichen Rang mit dem Leitungsstrome ein und darf hier ebensowenig wie die Energie des elektrostatischen Feldes vernachlässigt werden. Um aber sonst möglichst einfache Bedingungen zu schaffen, setze ich voraus, dass die Permeabilität überall constant $= \mu_0$ ist und dass auch die inductive Capacität K im Dielektricum (§ 38) constant ist.

Das Problem, um das es sich hier handelt, ist besonders wegen des Zusammenhanges, in dem es mit den grundlegenden Versuchen von Hertz steht, von Wichtigkeit geworden. Auf irgend eine Art, die uns nicht kümmert, weil sie sich auf Vorgänge bezieht, die vor dem Zeitpunkte lagen, von dem an wir das Phänomen betrachten wollen, sei eine Ladung der Condensatorplatten, wie wir der Kürze wegen die vorhin erwähnten beiden Körper nennen wollen, und in dem verbindenden Drahte ein Leitungsstrom zu Stande gebracht. Es handelt sich darum, zu ermitteln, wie sich der Vorgang nun weiterhin abspielt.

Hier sind nun zwei wesentlich verschiedene Fälle zu unterscheiden. Je kleiner man die elektrostatische Capacität des Condensators macht, desto kürzere Zeit vergeht, bis sich die Ladungen ausgeglichen haben, um so schneller erfolgen überhaupt alle vorkommenden Aenderungen. Bei weiterer Verkleinerung der Capacität wird schliesslich die Länge der von dem Leiter ausgesendeten elektromagnetischen Wellen so klein, dass sie mit den Leiterabmessungen von gleicher Grössenordnung wird. Zur Erläuterung des hier eingeführten Begriffes der Wellenlänge bemerke ich nämlich, dass, wie sich alsbald zeigen wird, der ganze Vorgang ein oscillatorischer ist. Während der Zeit zwischen zwei correspondirenden Stromphasen pflanzt sich die elektromagnetische Störung in dem umgebenden Mittel mit derselben Geschwindigkeit wie das Licht fort und, wenn die Zeit sehr kurz war, kann die Entfernung zwischen zwei in derselben Phase stehenden Stellen des Mediums, bis zu denen die Störungen von zwei aufeinanderfolgenden Oscillationen gelangt sind — d. h. die Wellenlänge — nur wenige Meter, oder selbst nur Bruchtheile eines Meters betragen, während sie in den gewöhnlich vorkommenden Fällen nach Kilometern zählt.

Durch die Verkleinerung der Capacität erreichte Hertz bei seinen Versuchen gegenüber den früheren von Feddersen u. s. w. eine sehr vergrösserte Zahl von Schwingungen in der Secunde und eine dementsprechend verkleinerte Wellenlänge, die dadurch in den Bereich der Messbarkeit gerückt wurde. Zum ersten Male wurde dadurch der Nachweis geliefert, dass die Fortpflanzung elektromagnetischer Wirkungen durch das Medium (den Luftraum) Zeit erfordert, wie es von der Maxwell'schen Theorie — und nur von dieser — vorausgesagt war. Mit Fug und Recht darf man das Ergebniss dieser Versuche nicht nur als eine Bestätigung der Maxwell'schen Theorie, sondern geradezu als den entscheidenden Beweis dafür betrachten, dass sie, im grossen Ganzen und von der speciellen Ausgestaltung im Einzelnen abgesehen, das Rechte trifft.

Für die Behandlung der sehr schnellen Schwingungen eignet sich die Potentialtheorie aus den in § 100 dargelegten Gründen nicht. Die Aufgabe lässt sich dann nur durch die unmittelbare Integration der beiden Hauptgleichungen lösen, wie dies späterhin näher ausgeführt werden wird. Hier werde ich desshalb nur den anderen, den „vor-Hertz'schen" Fall ins Auge fassen, dass die Wellenlänge sehr gross ist im Vergleiche zu den Abmessungen des Leiters, dass die vorkommenden Aenderungen also im Sinne von § 100 als langsame aufgefasst werden können.

Die von der Zeit t unabhängige Capacität des Condensators sei mit Cap (die Anwendung des sonst gebräuchlichen einfachen C verbietet sich hier, da dieses schon den Strom bedeutet) und der elektrische Potentialunterschied zwischen beiden Belegungen zur Zeit t mit V bezeichnet. Um die Vorstellungen zu fixiren, wollen wir ferner annehmen, dass die eine Belegung mit der Erde verbunden sei, so dass ihr Potential stets Null ist, während das Potential der anderen in dem gegebenen Augenblicke an allen Stellen als gleich gross (nämlich gleich V) angesehen werden kann. Nach Gleichung (122) S. 102 kann dann die elektrostatische Energie zur gegebenen Zeit

$$T_e = \frac{1}{2} V \int \varrho_w dv$$

gesetzt werden, wobei sich die Integration nur auf die isolirte Elektrode zu erstrecken braucht, da auf der andern $V = 0$ ist. Nach der Definition der Capacität in § 46 ist

$$\int \varrho_w dv = V \cdot \mathrm{Cap},$$

also

$$T_e = \frac{1}{2} V^2 \cdot \mathrm{Cap} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (247)$$

Für die magnetische Energie können wir den in Gleichung (240) aufgestellten Ausdruck

$$T_m = \frac{1}{2} C^2 \cdot L$$

hier ebenfalls verwenden. Falls die Enden des Leiters nur durch eine dünne dielektrische Schicht getrennt sind, wie es bei der Einschaltung eines eigentlichen Condensators zutrifft, kann der Selbstinductionscoefficient genau genug nach Gleichung (234) wie für einen ganz geschlossenen einfachen Kreisstrom berechnet werden. Aber auch im andern Falle kann nach Gleichung (239) L immer so ermittelt werden, dass T_m durch die vorstehende Gleichung richtig angegeben wird. Dabei ist, wie aus den mit der Ableitung von Gleichung (239) verbundenen Betrachtungen hervorgeht, das so bestimmte L immer noch unabhängig von C und daher von der Zeit.

An die Stelle der eingeprägten elektromotorischen Kraft bei der Aufstellung der Differentialgleichung für den einfachen Kreisstrom in § 105 tritt hier die Potentialdifferenz V zwischen den Belegungen. An Stelle von Gleichung (241) erhalten wir daher jetzt

$$V - L\frac{dC}{dt} = CR \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (248)$$

wobei R den Leitungswiderstand des offenen Leiterkreises bedeutet.

Der Leitungsstrom C ist aber ebensogross als der Verschiebungsstrom durch das Dielektricum zwischen den Belegungen des Condensators, durch den er zu einem geschlossenen Strome ergänzt wird. Nach § 64 ist die specifische Intensität des Verschiebungsstromes gleich $\dot{\mathfrak{D}}$, die ganze Stärke daher gleich der Menge an wahrer Elektricität, die durch ihn in der Zeiteinheit von der einen zur anderen Belegung übergeht. Wir erhalten daher

$$Cdt = -d\int \varrho_w dv = -\mathrm{Cap}\cdot dV \quad . \quad . \quad . \quad (249)$$

Das Minuszeichen tritt hier desshalb in die Gleichung ein, weil C durch den Draht von der positiv zu der negativ geladenen Belegung fliesst, mit einem positiven C also eine Abnahme des positiven V verbunden ist.

Eliminirt man aus den Gleichungen (248) und (249) C, so erhält man eine einfache Differentialgleichung für V

$$V + L \cdot \mathrm{Cap} \cdot \frac{d^2 V}{dt^2} + R \cdot \mathrm{Cap} \frac{dV}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad (250)$$

und andererseits wenn man V eliminirt

$$C + L \cdot \mathrm{Cap} \cdot \frac{d^2 C}{dt^2} + R \cdot \mathrm{Cap} \frac{dC}{dt} = 0 \quad . \quad . \quad (251)$$

Die beiden Variabeln C und V erfüllen demnach dieselbe Differentialgleichung nach der Zeit. Diese Gleichung ist von der Form

$$y + ay'' + by' = 0$$

und ihr vollständiges Integral ist

$$y = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (252)$$

worin c_1 und c_2 die beiden Integrationsconstanten, k_1 und k_2, aber die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$1 + ak^2 + bk = 0$$

bedeuten. Setzt man die Werthe ein, die für a und b nach den Gleichungen (250) und (251) gelten und löst nach k auf, so erhält man

$$k_1 = \frac{1}{2L}\left\{-R + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{\mathrm{Cap}}}\right\}; \quad k_2 = \frac{1}{2L}\left\{-R - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{\mathrm{Cap}}}\right\}.$$

Beide Lösungen sind, so lange sie reell sind, negativ; die zugehörige Exponentialgrösse nimmt also mit der Zeit ab. In diesem Falle treten keine Oscillationen auf, sondern es findet nur eine einfache Entladung zwischen den Belegungen des Condensators statt. Je mehr wir den Widerstand R verringern, dabei L vergrössern und Cap verkleinern, desto mehr nähern wir uns dagegen der oscillatorischen Entladung für die

$$\frac{4L}{\mathrm{Cap}} > R^2$$

sein muss. Für die oscillatorische Entladung, die uns hier besonders interessirt, erhalten wir durch Umformung der

Exponentialgrössen und indem wir die Constanten durch andere ersetzen, so dass nur reelle Werthe vorkommen

$$y = e^{-\frac{R}{2L}t}\left\{A\cos\left(\frac{t}{2L}\sqrt{\frac{4L}{\mathrm{Cap}} - R^2}\right) + B\sin\left(\frac{t}{2L}\sqrt{\frac{4L}{\mathrm{Cap}} - R^2}\right)\right\} \quad (253)$$

Hier kann y sowohl V als C bedeuten; die beiden Constanten A und B sind natürlich für beide Fälle gesondert aus den Grenzbedingungen zu bestimmen.

Das hier behandelte Problem geht übrigens in das früher in § 104 behandelte über, wenn man Cap $= \infty$ setzt. Gleichung (252) entspricht dann Gleichung (242); k_1 wird zu Null und $k_2 = - R/L$.

Setzt man umgekehrt $R = 0$ und rechnet man die Zeit von einem Augenblicke ab, in dem der Strom $C = 0$ war, so erhält man aus Gleichung (253) für C

$$C = B \sin \frac{t}{\sqrt{L\,\mathrm{Cap}}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (254)$$

Das Phänomen ist dann ein rein periodisches ohne jede Dämpfung. Bei der allgemeinen Lösung in Gleichung (253) wird die durch Aufzehrung der anfänglich vorhandenen magnetischen und elektrostatischen Energie durch die Joule'sche Wärmeentwickelung eintretende Dämpfung durch den vor der Klammer stehenden Exponentialfactor zum Ausdrucke gebracht. Falls die Schwingungsdauer klein ist, kann indessen eine grössere Zahl von Schwingungen vergehen, ehe dieser Factor merklich kleiner als 1 geworden ist.

Eine volle Schwingung hat sich vollzogen, sobald der Winkel, von dem in den Gleichungen (253) und (254) die Functionen sin und cos vorkommen, um 2π angewachsen ist. Bezeichnet man die Schwingungsdauer mit t_0, so hat man demnach

$$\frac{t_0}{2L}\sqrt{\frac{4L}{\mathrm{Cap}} - R^2} = 2\pi \quad \text{oder} \quad t_0 = 4\pi L\sqrt{\frac{\mathrm{Cap}}{4L - R^2\,\mathrm{Cap}}} \quad (255)$$

Für den besonderen Fall, dass $R = 0$ ist, vereinfacht sich dies zu

$$t_0 = 2\pi\sqrt{L \cdot \mathrm{Cap}}\,.$$

Dass diese Formeln homogen sind in Bezug auf die Dimensionen der in ihnen vorkommenden Grössen ergibt sich leicht, wenn man die in § 70 und § 103 aufgestellten Dimensionen einsetzt. Bei ihrer Anwendung dürfen natürlich alle Grössen nur auf dasselbe System von Einheiten bezogen werden. Häufig ist von vornherein die Capacität nach elektrostatischem Maasse gegeben, während L und R im magnetischen Maasssysteme ausgedrückt sind. Man muss Cap dann zuvor gleichfalls in das magnetische Maasssystem umrechnen. Für einen Kugelcondensator z. B. erhält man Cap aus den Dimensionen der Kugelradien und der Dielektricitätsconstanten unmittelbar nach Gleichung (126). Hatte man hier z. B. in einem bestimmten Falle $K = 5$, $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 10{,}2$ cm, so folgt Cap = 2550 C.-G.-S. im elektrostatischen Maasse. Für die Umrechnung in magnetisches Maass beachte man, dass $K = 5$ eigentlich $K = 5 K_0$ bedeutet, wo K_0 die Dielektricitätsconstante der Luft angibt, die im elektrostatischen Maasssysteme gleich 1 gesetzt wird. Ausführlicher und ohne Bezugnahme auf ein bestimmtes Maasssystem angeschrieben ist daher Cap $= 2550\,\mathrm{cm} \cdot K_0$. — Nach Gleichung (140) ist $K_0 = 1/\mu_0 v_0^2$. Setzen wir also, um zu dem magnetischen Maasssysteme überzugehen, jetzt $\mu_0 = 1$ und v_0 gleich der für den Luftraum auf experimentellem Wege zu etwa $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec ermittelten charakteristischen Geschwindigkeit, so haben wir $K_0 = 1/(3 \cdot 10^{10})^2$, also Cap $= 283 \cdot 10^{-20}$ zu setzen.

Wenn eine Leydener Flasche von dieser Capacität durch einen einfachen Schliessungsbogen entladen wird, lässt sich das zugehörige L nach Gleichung (234) bestimmen, wobei wie vorher $\mu_0 = 1$ zu setzen ist. Es mag etwa $L = 10^7$ C.-G.-S. sein. Der Widerstand sei gleich 1 Ohm oder gleich 10^9 C.-G.-S. Dann wird t_0 nach Gleichung (255) gleich etwa 0,000033 sec und die Wellenlänge der elektromagnetischen Störung im Dielektricum gleich etwa 10 Kilometern. In solchen Fällen sind wir zweifellos zur Anwendung der Potentialtheorie berechtigt; elektromagnetisch betrachtet erfolgen die Schwingungen äusserst langsam. So lange die Schwingungsdauer nicht kleiner wird als etwa ein Milliontel Secunde (entsprechend einer Wellenlänge von 300 Metern) wird man überhaupt in den gewöhnlich vorliegenden Fällen (abgesehen von Telegraphen- und Telephonleitungen) kaum nöthig haben, auf den Umstand Rücksicht zu nehmen, dass die Fortpflanzung der Wirkung durch den Raum einen Zeitaufwand bedingt.

Schliesslich sei noch auf den durch Gleichung (254) für den Fall, dass $R = 0$ ist, dargestellten Schwingungsverlauf etwas näher eingegangen. Ganz so wie es diese Gleichung ausspricht, wird sich der Vorgang zwar niemals abspielen können; sehr oft trifft dies in hoher Annäherung zu, wie sich aus dem angeführten Zahlenbeispiel leicht ergibt. Der die Dämpfung der Schwingungen ausdrückende Exponentialfactor nimmt nämlich unter den gegebenen Verhältnissen ($L = 10^7$, $R = 10^9$) erst nach 0,02 Secunden den Werth $1/2{,}718\ldots$ an. Während dieser Zeit erfolgen aber ungefähr 600 Schwingungen, so dass in der That für eine oder für eine kleine Anzahl aufeinander folgender Schwingungen eine kaum merkliche Dämpfung eintritt. Jener durch Gleichung (254) dargestellte Fall hat daher als Grenzfall, der sich oft in grosser Annäherung mit dem wahren Vorgange deckt, eine nicht zu unterschätzende Bedeutung.

Die Integrationsconstante B bildet das Maass für die Intensität des ganzen Vorgangs; sie stellt den Maximalwerth von C im Verlaufe einer Schwingung dar. Gleichung (248) geht in unserem Falle über in $V = L\,dC/dt$ und liefert nach Einsetzen von C aus Gleichung (254)

$$V = B \cdot \sqrt{\frac{L}{\mathrm{Cap}}} \cdot \cos \frac{t}{\sqrt{L \cdot \mathrm{Cap}}} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (256)$$

Der Maximalwerth von V ist daher gleich $B\sqrt{L/\mathrm{Cap}}$.

Die gesammte Schwingungsenergie T setzt sich in jedem Augenblicke aus der elektrostatischen und der magnetischen Energie zusammen, für die wir die früher (Gl. 247) gegebenen Werthe benutzen können. Wir erhalten so

$$T = T_m + T_e = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cap}\cdot V^2 + \tfrac{1}{2}\,LC^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\mathrm{Cap}\left\{B^2 \frac{L}{\mathrm{Cap}} \cos^2 \frac{t}{\sqrt{L\,\mathrm{Cap}}}\right\} + \tfrac{1}{2}L\left\{B^2 \sin^2 \frac{t}{\sqrt{L\,\mathrm{Cap}}}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,B^2 L.$$

Diese Betrachtung lehrt uns, dass die ganze Energie sich unverändert in der Schwingung erhält, aber so, dass sie wechselsweise die Formen T_m und T_e annimmt. Das Wesen der Schwingung kann daher in dem sich fortwährend wiederholenden Umsatze aus elektrischer Energie in magnetische und umgekehrt erblickt werden. Die Vertheilung der Energie auf den Raum ist in beiden Fällen durchaus verschieden. Die elektrostatische Energie hat ihren Sitz im Dielektricum des Condensators und die magnetische Energie vertheilt sich über das Medium (etwa den Eisenkern), das von den Windungen des Leiters umschlungen ist. Mit der Schwingung ist daher auch ein pulsirender Energiestrom von der einen Stelle zur andern durch die Vermittelung des ganzen Mediums verbunden.

Die Betrachtung dieses Vorgangs ist von Interesse wegen des Zusammenhanges, in dem er mit den Hertz'schen Schwingungen und den Lichtschwingungen steht. Indessen darf hierbei nicht vergessen werden, dass beide sich zwar gleichen, dass sie aber nicht identisch sind, weil in dem jetzt behandelten Falle die Potentialtheorie angewendet wurde und daher die Voraussetzung zu Grunde gelegt werden musste, dass die vorkommenden Aenderungen nur langsam erfolgen. Dies hat u. A. zur Folge, dass die ganze Energie unverändert erhalten bleibt, wenn $R = 0$ ist. Genau kann dieser Schluss offenbar nicht zutreffen, denn in den Wellen, die von der Schwingung in das unbegrenzt zu denkende Medium ausgesendet werden, ist auch Energie enthalten und je weiter bei dem Fortgange der Schwingungen die Wellenzüge sich in den unendlichen Raum hinaus ausdehnen, um so mehr muss der ursprüngliche Energieinhalt der Schwingung dadurch aufgezehrt werden. Die Potentialtheorie nimmt hierauf keine Rücksicht.

§ 108. Wechselwirkung zwischen zwei einfachen ruhenden Kreisströmen.

Unterscheiden wir die beiden Ströme C_1 und C_2 durch Indices und alle anderen zugehörigen Grössen in derselben Weise von einander, so geht aus der Definition des Vectorpotentials zunächst hervor, dass

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$$

ist, wobei unter $\mathfrak{A}$ das totale Vectorpotential zu verstehen ist. Daraus folgt weiter, dass auch $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ ist, dass also die beiden magnetischen Felder sich einfach superponiren. Die ganze Energie des durch die beiden Ströme geschaffenen magnetischen Feldes kann zunächst wieder durch Gleichung (236) ausgedrückt, dann aber weiter in 4 Glieder zerlegt werden:

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{B}\mathfrak{H}\,dv$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left\{\int \mathfrak{B}_1\mathfrak{H}_1 dv + \int \mathfrak{B}_2\mathfrak{H}_2 dv + \int \mathfrak{B}_1\mathfrak{H}_2 dv + \int \mathfrak{B}_2\mathfrak{H}_1 dv\right\} \quad (257)$$

Die ersten beiden Glieder geben die Energie an, die den beiden Kreisströmen zukommt, wenn sie entfernt von einander sind; sie sind nothwendig positiv. Die beiden anderen Glieder sind von gleicher Grösse, da überall $\mathfrak{B}_1\mathfrak{H}_2 = \mu\mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1\mathfrak{B}_2$ ist. Ihre Summe gibt den Energiezuwachs an, der durch die Nachbarschaft der beiden Ströme bedingt wird; die Summe, also auch jedes ihrer Glieder, kann aber auch negativ werden, da $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ nicht mehr gleich gerichtet sind.

So wie früher (in § 104) für einen einzelnen Kreisstrom, wollen wir hier ebenfalls den Ausdruck für T so umformen, dass er mit dem von der Fernwirkungstheorie gegebenen übereinstimmt. Die Betrachtung läuft dabei genau mit der in § 104 gegebenen parallel und kann daher jetzt unter dem Hinweise auf diese etwas kürzer gefasst werden.

An Stelle von Gleichung (238) erhält man hier

$$T = \frac{1}{2}\mu_0\int (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)(\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2)\,dv$$

und hieraus, entsprechend Gleichung (239),

$$T = \frac{1}{2}\mu_0 \left\{ C_1 \int \mathfrak{A}_1 d\mathfrak{s}_1 + C_1 \int \mathfrak{A}_2 d\mathfrak{s}_1 + C_2 \int \mathfrak{A}_1 d\mathfrak{s}_2 + C_2 \int \mathfrak{A}_2 d\mathfrak{s}_2 \right\}.$$

Nach Gleichung (233) können das erste und vierte Glied dieser Gleichung mit Hülfe der beiden Selbstinductionscoefficienten L_1 und L_2 ausgedrückt werden. Für die beiden anderen Glieder findet man durch Einsetzen des Werthes von $\mathfrak{A}$ aus dessen Definitionsgleichung

$$C_1 \int \mathfrak{A}_2 d\mathfrak{s}_1 = C_2 \int \mathfrak{A}_1 d\mathfrak{s}_2 = C_1 C_2 \int\int \frac{d\mathfrak{s}_1\, d\mathfrak{s}_2}{r}.$$

Begnügen wir uns wieder, wie in Gleichung (234), zur Abkürzung ein einziges Integralzeichen zu schreiben und setzen wir

$$M_{2,1} = M_{1,2} = \mu_0 \int \frac{d\mathfrak{s}_1\, d\mathfrak{s}_2}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (258)$$

so nimmt schliesslich der Ausdruck für die Energie des magnetischen Feldes der beiden Kreisströme die Form an

$$T = \frac{1}{2} C_1^2 L_1 + \frac{1}{2} C_2^2 L_2 + C_1 C_2 M_{1,2} \quad . \quad . \quad (259)$$

Die durch Gleichung (258) definirte Grösse $M_{1,2}$ oder $M_{2,1}$ heisst der Coefficient der gegenseitigen Induction zwischen den beiden Kreisströmen.

Bei der Definition von $M_{1,2}$ ist natürlich ebenso wie bei der Definition des Selbstinductionscoefficienten angenommen worden, dass entweder überhaupt kein Eisen vorkommt, oder dass doch die Permeabilität überall im magnetischen Felde als constant angesehen werden kann. Zuweilen nimmt man z. B. an, dass dies letztere im Kerne eines sog. Ringtransformators, wie er in der Wechselstromtechnik verwendet wird, zutreffe. Besser ist es aber meistens, in diesem Falle von der Verwendung des Begriffes eines Inductionscoefficienten ganz abzusehen und dafür unmittelbar mit den magnetischen Strömen zu rechnen.

Für langsame Aenderungen der Stromstärken in beiden

Kreisen berechnet sich die im ersten Kreise inducirte elektromotorische Kraft nach Gleichung (230) zu

$$\begin{aligned}\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{E}_m d\mathfrak{s}_1 &= -\mu_0 \frac{d}{dt}\int_{P_0}^{P_0} (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) d\mathfrak{s}_1 \\ &= -\mu_0 \frac{dC_1}{dt}\int d\mathfrak{s}_1 \int \frac{d\mathfrak{s}_1}{r} - \mu_0 \frac{dC_2}{dt}\int d\mathfrak{s}_1 \int \frac{d\mathfrak{s}_2}{r} \\ &= -L_1 \frac{dC_1}{dt} - M_{1,2}\frac{dC_2}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (260)\end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (259) kann man dafür auch schreiben

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{E}_m d\mathfrak{s}_1 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial C_1}\right) = -\frac{\partial}{\partial C_1}\left(\frac{dT}{dt}\right) \quad . \quad . \quad (261)$$

und dieselben Gleichungen gelten auch, wenn man die Indices 1 und 2 mit einander vertauscht. Das Glied $-L_1 dC_1/dt$ gibt die elektromotorische Kraft der Selbstinduction im ersten Kreise und das Glied $-M_{1,2}dC_2/dt$ die der Induction des zweiten Kreises auf den ersten an.

Mit denselben Bezeichnungen wie in § 104 erhalten wir nun die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} E_1 - L_1\frac{dC_1}{dt} - M\frac{dC_2}{dt} &= C_1 R_1 \\ E_2 - L_2\frac{dC_2}{dt} - M\frac{dC_1}{dt} &= C_2 R_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (262)$$

die an die Stelle von Gleichung (241) in dem dort behandelten Falle treten.

Durch Elimination von C_1 erhält man für den Strom C_2 daraus die Differentialgleichung

$$\frac{d^2C_2}{dt^2}(L_1L_2 + M^2) + \frac{dC_2}{dt}(L_1R_2 - L_2R_1) + R_1(E_2 - R_2C_2) = 0 \quad (263)$$

und bei Vertauschung der Indices gilt diese auch für den ersten Kreis. Für $M_{1,2} = M_{2,1}$ ist in diesen Gleichungen der Kürze halber einfach M geschrieben.

Auch das Integral von Gleichung (263) lässt sich leicht mit Hülfe von Exponentialfunktionen, an deren Stelle eventuell wieder trigonometrische Funktionen treten, angeben. Hierauf beruht die elementare Theorie des Transformators. Es würde uns aber zu weit führen, wenn wir darauf näher eingehen wollten.

Der in Gleichung (261) vorkommende partielle Differentialquotient $\partial T / \partial C_1$ gibt nach Gleichung (232) den magnetischen Kraftfluss durch die von der Bahn des ersten Leiters umschlungene Fläche an und sein Differentialquotient nach der Zeit daher den magnetischen Strom durch diese Fläche. In dieser Fassung spricht Gleichung (261) dann wieder das Inductionsgesetz in der einfachsten Form aus.

§ 109. Erhaltung der Energie.

Die Aenderung der Energie T des im vorhergehenden § betrachteten magnetischen Feldes im Zeitelemente dt ergibt sich aus Gleichung (259) zu

$$dT = C_1 dt\left(L_1 \frac{dC_1}{dt} + M \frac{dC_2}{dt}\right) + C_2 dt\left(L_2 \frac{dC_2}{dt} + M \frac{dC_1}{dt}\right).$$

Die Glieder sind hier schon so zusammengefasst, dass die beiden Klammerwerthe, vom Vorzeichen abgesehen, nach Gl. (260) die in den beiden Kreisen inducirten elektromotorischen Kräfte angeben. Setzt man dafür die aus der Gl. (262), also aus dem Ohm'schen Gesetze, hervorgehenden Werthe ein, so erhält man

$$dT = dt(E_1 C_1 - R_1 C_1^2) + dt(E_2 C_2 - R_2 C_2^2) \,.. (264)$$

Jedes der vier Glieder, in die sich die rechte Seite zerlegen lässt, hat aber eine einfache physikalische Bedeutung. $E_1 C_1 dt$ gibt die von der eingeprägten elektromotorischen Kraft E_1 im ersten Kreise gelieferte und $R_1 C_1^2 dt$ die daselbst in Joule'sche Wärme umgewandelte Energie an. Mit den sich auf den zweiten Stromkreis beziehenden beiden andern Gliedern verhält es sich ebenso. Demnach dient der Ueberschuss der von den einpeprägten Kräften gelieferten über die gleichzeitig in beiden Stromkreisen verwüstete Energie zur Erhöhung der Energie des magnetischen Feldes. Umgekehrt wird, wenn die durch E_1 und E_2 zugeführte Energie den gleichzeitigen Aufwand für die Joule'sche Wärme nicht deckt, der Fehlbetrag aus der Energie des magnetischen Feldes entnommen.

Gl. (264) spricht demnach das Gesetz der Erhaltung der Energie für das aus den beiden Stromkreisen bestehende System aus.

Bei der von mir innegehaltenen Darstellung ist das Inductionsgesetz als Erfahrungsthatsache von vornherein in das Lehrgebäude aufgenommen worden und erst nachträglich hat sich jetzt — zunächst wenigstens für den soeben behandelten Fall — herausgestellt, dass es im Einklange mit dem Energieprincipe steht. Umgekehrt kann man auch, wie zuerst von v. Helmholtz gezeigt wurde, das Inductionsgesetz aus Gl. (264), die nach dem Energieprincipe stets zutreffen muss, als Folgerung ableiten. An frühern Stellen erwähnte ich schon wiederholt, aus welchen Gründen ich von diesem Entwicklungsgange, der seither zu dem üblichsten geworden ist, hier abgewichen bin.

Zweites Capitel.

Der Poynting'sche Energiestrom.

§ 110. Die Identität der Energie.

Seit langer Zeit verband sich mit der Auffassung der Naturerscheinungen eine meistens freilich recht unklare Vorstellung von dem, was wir heute Energie nennen, — zum mindesten seit der Zeit, in der man zu der Ueberzeugung von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile gelangt war. Diese Vorstellungen wurden gerichtet und zum grossen Theile auch berichtigt durch jene grossen Entdeckungen in den vierziger Jahren unseres Jahrhunderts, besonders durch die v. Helmholtz'sche Schrift über die „Erhaltung der Kraft“. Aber sie wurden dadurch noch nicht in feste, unveränderliche Formen gebracht.

Während der letzten 50 Jahre haben wir uns immer mehr daran gewöhnt, der Energie die entscheidende Rolle bei allen Naturvorgängen zuzusprechen. Die Energie ist stets an einen Stoff gebunden; doch braucht dieser nicht eine „Materie“ im engeren Sinne zu sein, da die Energie auch mit dem Aether verknüpft sein kann. Zuerst fasste man das Verhältniss so auf, dass die Energie eine Eigenschaft der Materie (oder des Stoffes) angebe, dann hielt man beide für gleichwerthig und jetzt sind manche Physiker schon dazu übergegangen, den Energiebegriff über den Begriff des Stoffes zu stellen, so nämlich, dass der Stoff nur noch die Bedeutung eines Substrates für die Energieäusserungen oder gar nur noch die einer Eigenschaft der angesammelten Energiemengen behält.

Diese Entwickelung der Energievorstellungen mag vielleicht über das Ziel hinausschiessen; sie lässt sich, wie ich glaube, mit jener von den Vorstellungen über die Fernkräfte nach Newton in unmittelbare Parallele stellen. Für Newton selbst war der Begriff einer unvermittelten Wirkung in die Ferne noch unfassbar; die Fernkräfte waren für ihn nur Rechnungsgrössen, mit denen sich die beobachteten Thatsachen am einfachsten wiedergeben liessen. Die ihm folgenden Generationen waren aber in der Vorstellung von der Fernwirkung aufgewachsen und fanden nichts befremdendes mehr darin. Auch die Zurückführung der elektrischen und magnetischen Erscheinungen auf Fernkräfte oder „Centralkräfte“ schien, wenn sie gelang, die befriedigendste Lösung des Räthsels zu sein. Erst jetzt sind wir durch das Uebergewicht der Faraday-Maxwell'schen Darstellung und in Verbindung damit durch die bahnbrechenden Versuche von Hertz zu den Vorstellungen über die Nothwendigkeit eines raumerfüllenden Mittels für die Uebertragung einer Wirkung in die Ferne wieder zurückgelangt, die Newton selbst hegte, durch die er aber nicht daran gehindert wurde, daneben von dem Begriffe der Fernkräfte Gebrauch zu machen.

So mag es auch vielleicht mit jenen weitgehenden Vorstellungen über die Bedeutung der Energie sein, in die wir uns allgemach alle mehr oder weniger hineingelebt haben. — Wenn wir annehmen, dass die Energie der Materie mindestens gleichwerthig gegenüber steht, dass sie also wie diese den wahren Zustand der Dinge bedingt und ihn mit der Materie zusammen auch erschöpfend bestimmt, so nähert sich die Vorstellung, die wir uns von der Energie machen, damit immer mehr jener von der Materie, also etwa jener Vorstellung von dem „Dinge an sich", die schon zu so vielen philosophischen Controversen Veranlassung gab.

Wesentlich für den Begriff der Materie ist aber besonders die Möglichkeit, deren Identität festzustellen. Wir sind im Stande, zum mindesten in Gedanken, die Schicksale einer genau bestimmten Stoffmenge über lange Zeit und über viele Umwandlungen chemischer und anderer Art hinaus zu verfolgen. In erster Linie hängt die Möglichkeit dieser Individualisirung der Materie damit zusammen, dass sich die Materie immer nur continuirlich durch den Raum zu bewegen vermag und dass sie ferner im Raume sich nicht übereinander zu lagern vermag (Undurchdringlichkeit der Körper). Gestützt wird die Vorstellung ausserdem noch durch die Annahmen über den molekularen Aufbau der Körper.

Sind wir nun auch im Stande, die Identität einer bestimmten Energiemenge, wiederum wenigstens in Gedanken, festzuhalten? Die Antwort erscheint vorläufig noch sehr zweifelhaft. Wer dem Energiebegriffe eine Rolle zuspricht, die jener der Materie übergeordnet oder doch mindestens gleich ist, wird sie unbedenklich bejahen. Er wird sich den ganzen unveränderlichen Energievorrath des Universums in beständiger Bewegung begriffen denken und in diesen Ortswechseln der Energiemengen das Wesen aller Naturerscheinungen erblicken. Der Begriff des Energiestroms wird ihm ebenso nahe liegen, wie etwa der Begriff eines Luftstromes. Ein discontinuirlicher Uebergang mit Ueberspringung des dazwischen liegenden Raumes erscheint ihm aus denselben Gründen nicht denkbar, wie bei der Materie. Der Festhaltung der Identität einer bestimmten Energiemenge steht hiermit kein wesentliches Hinderniss mehr im Wege.

Gegen diese Auffassung, der sich die Physiker mehr und mehr zuzuneigen scheinen, lassen sich nun allerdings noch manche Bedenken geltend machen. Zunächst vermögen sich in einem gegebenen Raumelemente mehrere Energiemengen über einander zu lagern, ohne dass beim Hinzukommen einer neuen die früher vorhandenen auf einen kleineren Raum zusammengedrängt werden müssten, um dem Neuankömmlinge Platz zu schaffen. Da erscheint es doch sehr fraglich, ob eine Individualisirung zwischen diesen über einander gelagerten, den gleichen Raum ausfüllenden Energiemengen noch für durchführbar gehalten werden kann. Auch dass die Energie — soweit ist, wie es scheint, doch noch niemand gekommen, ihr auch diese Eigenschaft beizulegen — nicht aus „Energieatomen" zusammengesetzt ist, sondern unbegrenzte Theilbarkeit besitzt, warnt davor, die Materialisirung der Energie zu weit zu treiben. — Eine gewisse Vorsicht ist gegenüber den aus dem Begriffe der Energieströme gezogenen Schlüssen daher zweifellos gerechtfertigt. In diesem Capitel werde ich indessen die Möglichkeit, die Identität einer Energiemenge festzuhalten, voraussetzen.

§ 111. Die Energieströme der gewöhnlichen Mechanik.

Um eine klare Vorstellung von den Energieströmen zu gewinnen, ist es nützlich, sich zu vergegenwärtigen, wie sich die Energie im Bereiche der Mechanik der ponderablen Körper überträgt. Wenn man z. B. sagt, dass eine Welle in der Transmissionsanlage einer Fabrik so und so viele Pferdestärken überträgt, lässt sich dies auch dahin ausdrücken, dass sie einen Energiestrom von entsprechender Grösse ihrer

Längsrichtung nach fortleitet. Bezeichnen wir das Torsionsmoment der Welle mit M, die Winkelgeschwindigkeit mit u und den Energiestrom, also die in der Zeiteinheit von der Welle übertragene, oder wie wir sagen wollen, fortgeleitete Energie mit W, so ist offenbar

$$W = Mu,$$

oder, wenn $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{u}$ die zugehörigen Vectoren sind,

$$\mathfrak{W} = M\mathfrak{u}, \quad \text{oder auch} \quad \mathfrak{W} = -M\mathfrak{u},$$

je nach der Festsetzung des Vorzeichens von M.

Hängt ferner ein Gewicht Q an einem Seile und wir ziehen das Gewicht damit in die Höhe, so geht von der Stelle, wo die eingeprägte Kraft wirkt (also etwa von der Winde aus) nach Q hin ein Energiestrom, der

$$W = Qv$$

ist, wenn mit v die Geschwindigkeit der Bewegung bezeichnet wird. Der Energiestrom ist hier der Bewegung des Seiles entgegengesetzt gerichtet. Allgemein lässt sich der Energiestrom, der von einem gespannten Seile fortgeleitet wird, in Vectorform

$$\mathfrak{W} = -Q\mathfrak{v}$$

setzen. Q ist hier, wie vorher M, eine scalare Grösse.

Ein Riemen, der zwei Wellen mit einander verbindet, überträgt hiernach während des Ganges der Transmission zwei Energieströme, von denen der des stärker gespannten Theiles überwiegt.

Hier war von dem ganzen übertragenen Energiestrome die Rede; man kann ihn aber auch in einzelne Elemente zerlegen und unter $\mathfrak{W}$ die specifische Intensität dieses Stromes verstehen, also jene Energiemenge, die auf die Flächeneinheit des Riemen- Seil- oder Wellenquerschnitts berechnet in der Zeiteinheit übertragen wird. In dem zuletzt erwähnten Fall ist dabei zu beachten, dass den nach der Peripherie hin gelegenen Flächenelementen des Wellenquerschnitts eine grössere

Intensität $\mathfrak{W}$ zukommt, als den näher am Mittelpunkte liegenden.

In einer Röhrenleitung, die unter hohem Drucke stehendes Wasser, das etwa zum Betriebe hydraulischer Hebewerke dienen soll, in horizontaler Richtung fortleitet, geht ein Energiestrom, der mit der Wasserbewegung gleich gerichtet ist und dessen Intensität

$$\mathfrak{W} = p\mathfrak{v}$$

ist, wenn p den Wasserdruck in Dynen auf den qcm bedeutet.

Die Arme eines Zahnrades oder einer Riemenscheibe leiten einen Energiestrom in radialer Richtung zu oder von der Welle, auf der sie festgekeilt sind. Die Berührungsflächen zwischen den Zähnen von zwei Zahnrädern, die im Eingriffe mit einander sind, bilden die Ein- bezw. Austrittsstellen des Energiestromes; sie sind mit den Gleitstellen zu vergleichen, die beim Fortleiten eines elektrischen Stromes z. B. zwischen dem Commutator einer Dynamomaschine und der Stromabnehmerbürste vorkommen.

Ein Theil des Energiestromes in der vollständigen Maschinenanlage einer Fabrik wird unterwegs verbraucht zur Ueberwindung der Reibung. Der Energiestrom hat hier Convergenzstellen, in denen ein entsprechender Theil erlischt. Der Rest gelangt zu den Werkzeugen der sog. Arbeitsmaschinen, nämlich jener Maschinen, die wie z. B. die Drehbänke, die Webstühle u. s. f. das verlangte Fabrikat herstellen. Ein grosser Theil der zugeführten Energie wird auch an dem Werkzeuge noch in Wärme umgewandelt, der andere Theil gelangt in Form von potentieller Energie zur Aufspeicherung.

Man könnte diese Beispiele leicht noch vermehren; die vorhergehenden Erörterungen werden aber schon zu dem Nachweise genügen, dass die beschriebene Auffassung der Vorgänge in der That von Nutzen ist und vielleicht mehr, als dies seither geschah, in der gewöhnlichen Mechanik gepflegt werden sollte. Diese Erkenntniss wird uns dahin führen, den nachfolgenden Betrachtungen über den Energiefluss im elektromagnetischen Felde eine höhere Bedeutung beizulegen, als dies sonst vielleicht der Fall wäre.

Vorher sei noch darauf hingewiesen, dass überall in der Mechanik der ponderablen Körper ein Energiestrom einen Spannungszustand des Energieleiters und zugleich eine Geschwindigkeit — also überhaupt eine Bewegung desselben — zur Voraussetzung hat.*) Man wird daher geneigt sein, einen solchen Zusammenhang auch für die Energieübertragungen im elektromagnetischen Felde anzunehmen.

§ 112. Der Strom der elektromagnetischen Energie.

Eine einfache Combination der beiden Hauptgleichungen in ihrer vollständigsten Form, Gleichung (174) und (175), führt zu dem Poynting'schen Energiestrome im elektromagnetischen Felde. Diese Gleichungen lauteten

$$\mathrm{curl}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i) = 4\pi\mathfrak{c},$$
$$\mathrm{curl}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = -\,\mathfrak{g}.$$

Man multiplicire die erste scalar mit $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e$ und die zweite mit $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i$ und subtrahire dann die zweite von der ersten. Man erhält

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e)\,\mathrm{curl}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i) - (\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i)\,\mathrm{curl}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e)$$
$$= 4\pi\mathfrak{c}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) + \mathfrak{g}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i).$$

Auf die linke Seite können wir das durch Gleichung (81) ausgesprochene Rechengesetz anwenden. Die Gleichung vereinfacht sich dadurch wie folgt:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{V}(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i)(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = 4\pi\mathfrak{c}\mathfrak{E} - 4\pi\mathfrak{c}\mathfrak{E}_e + \mathfrak{g}\mathfrak{H} - \mathfrak{g}\mathfrak{H}_i \quad (265)$$

Jedes der vier Glieder auf der rechten Seite hat eine bestimmte physikalische Bedeutung. Betrachten wir zunächst

*) Eine Ausnahme bildet zwar die Energieübertragung durch die Schwerkraft oder überhaupt durch Fernkräfte. Wir betrachten diese Ausnahme aber als eine scheinbare, die uns nur deshalb als solche erscheint, weil uns der Mechanismus, durch den die Schwerkraft auf den gravitirenden Körper übertragen wird, vorläufig noch verborgen ist.

das erste Glied. Der wahre Strom $\mathfrak{c}$ wird hier, wo wir von Bewegungen im Felde absehen, nach Gleichung (151) durch

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \frac{K}{4\pi}\dot{\mathfrak{E}}$$

angegeben. Für $\mathfrak{c}\mathfrak{E}$ erhalten wir daher

$$\mathfrak{c}\mathfrak{E} = \mathfrak{i}\mathfrak{E} + \frac{K}{8\pi}\frac{d\mathfrak{E}^2}{dt}.$$

Nach dem Joule'schen Gesetze, Gleichung (147) ist $\mathfrak{i}\mathfrak{E}$ die auf die Volumen- und die Zeiteinheit bezogene, an der betreffenden Stelle des Feldes verwüstete Energie. Das andere Glied von $\mathfrak{c}\mathfrak{E}$ stellt nach Gleichung (116) die Zunahme an elektrostatischer Energie dar. Das erste Glied auf der rechten Seite von Gleichung (265) gibt demnach das 4π-fache des Bedarfes an Energie für die beiden vorher genannten Zwecke an.

Das dann folgende Glied $4\pi\mathfrak{c}\mathfrak{E}_e$ entspricht nach der schon bei der Besprechung von Gleichung (264) gegebenen Interpretation dem 4π-fachen der von der eingeprägten Kraft $\mathfrak{E}_e$ gelieferten Energie. Dann kommt das Glied $\mathfrak{g}\mathfrak{H}$, wofür wir auch

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\cdot\mathfrak{H} \quad \text{oder} \quad \frac{\mu}{2}\frac{d\mathfrak{H}^2}{dt}$$

schreiben können. Nach Gleichung (129) ist dies das 4π-fache des Zuwachses an magnetischer Energie. Das Glied $\mathfrak{g}\mathfrak{H}_i$ endlich haben wir, analog der Deutung, die dem zweiten Gliede zu geben war, als jenen Theil des eben angeführten Energiebedarfs zu betrachten, der von der eingeprägten Kraft $\mathfrak{H}_i$ geliefert wird.

Alle diese Energiegrössen beziehen sich, wie schon bei der Besprechung des ersten Gliedes bemerkt war, auf die Volumen- und die Zeiteinheit an der betreffenden Stelle des elektromagnetischen Feldes. Ihre Summe gibt demnach das 4π-fache des Energiebedarfs für die Erhöhung der elektrostatischen und der magnetischen Energie sowie für den Joule'schen Energieverbrauch, vermindert um jene Beträge an, die durch die eingeprägten Kräfte zugeführt werden, bezw. vermehrt um die betreffenden Beträge, wenn die eingeprägten Kräfte stumpfe Winkel mit den Stromrichtungen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{g}$ bilden, sodass für ihre Ueberwindung ein weiterer Aufwand veranlasst wird. Das ist also im Ganzen das 4π-fache des nicht schon an Ort und Stelle selbst gedeckten Energiebedarfs, oder auch, wenn die negativen Glieder überwiegen, des Energieüberschusses an der betreffenden Stelle des Feldes. Da der Energieinhalt des ganzen Systems constant bleiben muss, müssen sich die Ueberschüsse und Fehlbeträge im Ganzen ausgleichen. In der That gibt auch das Raumintegral des Ausdrucks über den ganzen betrachteten Raum Null, denn dieses Raumintegral ist gleich dem Raumintegrale der linken Seite von Gleichung (265) und dieses liefert nach den in § 104 nach Gleichung (237) enthaltenen Ausführungen für den ganzen Raum den Werth Null.

Bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{W}$ die als Vectorgrösse aufgefasste specifische Intensität der Energieströmung, so ist nach § 21 die rechte Seite von Gleichung (265) den vorhergehenden Darlegungen entsprechend gleich -4π div $\mathfrak{W}$ zu setzen. Gleichung (265) geht damit über in

$$\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\,(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_e)\,(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_i)=\mathrm{div}\,\mathfrak{W}\quad .\quad .\quad (266)$$

Dem Vorzeichenwechsel ist durch die Aenderung der Reihenfolge im Vectorproducte Rechnung getragen. Die Integration von Gleichung (266) liefert

$$\mathfrak{W}=\frac{1}{4\pi}\mathrm{V}\,(\mathfrak{E}-\mathfrak{E}_e)\,(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_i)+\mathrm{curl}\,\mathfrak{R}.\quad .\quad (267)$$

Das letzte Glied dieser Gleichung entspricht der Integrationsconstanten. Wir wissen zunächst von ihm nur, dass es ein Vector sein muss, dessen div verschwindet. Das ist aber die Bedingung dafür, dass wir diesen Vector als den curl eines anderen Vectors $\mathfrak{R}$ ansehen können, der seinerseits ganz beliebig im Raume vertheilt sein kann; von vornherein ist deshalb in der Formel die Integrationsconstante in der Form curl $\mathfrak{R}$ angeschrieben worden.

Setzt man willkürlich curl $\mathfrak{R}=0$, so erhält man den von Poynting angenommenen Energiestrom im elektromagnetischen Felde. Er gibt also zwar eine mit den Grundlagen der Theorie verträgliche, aber nicht eine mit Nothwendigkeit aus ihnen folgende Vertheilung des Energiestroms an.

Diese Bemerkung ist namentlich aus dem folgenden Grunde von Wichtigkeit. Man betrachte ein System, das aus einem isolirten geladenen Leiter und einem in seiner Nachbarschaft aufgestellten permanenten Magnete gebildet wird. Im Luftraume dieses gleichzeitig elektrostatischen und magnetischen Feldes wird, wenn man in Gleichung (267) das Glied curl $\mathfrak{K}$ unterdrückt,

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{4\pi} V \mathfrak{E}\mathfrak{H}.$$

Wir haben also einen in sich geschlossenen dauernden Energiestrom ohne jeden endgültigen Erfolg, da die Energie in jedem einzelnen Volumenelemente in dem betrachteten Falle ihren Werth überhaupt nicht ändert. Mit Recht hat man in Bezug auf diese Folgerung eingewendet, dass das Ergebniss sehr unwahrscheinlich und daher die Poynting'sche Vorstellung von der Vertheilung des Energiestromes nicht annehmbar sei.

Dieser Einwand wird aber nur durch die willkürliche Unterdrückung des Gliedes curl $\mathfrak{K}$ ermöglicht und richtet sich nicht gegen die vollständige Formel, Gleichung (267). Um dies einzusehen, beachte man nur, dass in dem angezogenen Falle sowohl $\mathfrak{c}$ als $\mathfrak{g}$ überall Null ist, und dass daher $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e$ nach den beiden Hauptgleichungen im ganzen Raume wirbelfrei vertheilt sind. Das ist die Bedingung dafür, dass sie von Potentialen abgeleitet werden können. Setzen wir also

$$\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i = -\nabla \Psi, \quad \mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e = -\nabla \Phi,$$

so geht Gleichung (267) für unseren Fall über in

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{4\pi} V \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi + \operatorname{curl} \mathfrak{K} \quad . \quad . \quad . \quad (268)$$

Nun ist aber nach dem Rechengesetze Gleichung (80), S. 61

$$\operatorname{curl} (\Phi \nabla \Psi) = \Phi \operatorname{curl} \nabla \Psi + V \nabla \Phi \nabla \Psi,$$

wobei noch das erste Glied auf der rechten Seite nach Gleichung (69) zu streichen ist. Das erste Glied in dem Ausdrucke für $\mathfrak{W}$ lässt sich daher ebenfalls als ein curl darstellen und man erhält damit

$$\mathfrak{W} = \operatorname{curl}\left(\frac{1}{4\pi}\Phi\nabla\Psi + \mathfrak{K}\right).$$

Um in dem betrachteten Falle überall den Energiestrom Null zu erhalten, genügt es nun schon,

$$\mathfrak{K} = -\frac{1}{4\pi}\Phi\nabla\Psi = (\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i)\cdot\frac{1}{4\pi}\Phi \quad . \quad . \quad (269)$$

zu setzen. Im Luftraume ist dieser Vector also überall mit den magnetischen Kraftlinien gleich gerichtet und sein Tensor wird aus dem von $\mathfrak{H}$ durch Multiplication mit dem elektrostatischen Potential und Division mit 4π gefunden. — Indessen ist diese Lösung nicht einmal die einzige, die den Energiestrom Null ergibt; aus der Symmetrie des ersten Gliedes in dem Ausdrucke für $\mathfrak{W}$ Gleichung (268) in Bezug auf Φ und Ψ folgt sofort, dass (abgesehen von einem Vorzeichenwechsel) die magnetische und elektrische Kraft und die zugehörigen Potentiale die Plätze mit einander tauschen können.

§ 113. Der Energiestrom in der Umgebung eines stationären geradlinigen elektrischen Stromes.

Dass ein elektrischer Strom Energie — im Wesentlichen seiner Längsrichtung nach — überträgt, bildet gerade das, was wir vom elektrischen Strome am genauesten und sichersten wissen. Fraglich ist nur, wie sich dieser Energiestrom im Einzelnen vertheilt, vor allem, ob die Fortleitung der Hauptsache nach in dem Metall oder in dem umgebenden Dielektricum erfolgt. Früher galt es einfach für selbstverständlich, dass die Energie denselben Weg verfolge wie der elektrische Strom selbst, also durch die Kupfermasse hindurchgehe. Nach der Poynting'schen Theorie wäre im Gegensatze hierzu das Dielektricum als der Energieleiter zu betrachten. Man ging sogar so weit, zu sagen, dass der elektrische Strom in Wirklichkeit ein im Dielektricum sich abspielendes Phänomen sei, das durch den Draht nur in einer gegebenen Richtung geführt würde. Dabei vergisst man aber, dass das Wort Strom schon in ganz bestimmter Weise definirt ist, und dass hiernach in dem vorliegenden Falle, wo nur Leitungsströme vorkommen, die elektrische Strömung ausschliesslich auf die Kupfermasse des Drahtes beschränkt ist. Dass der Strom mit anderen Vorgängen in seinem magnetischen Felde causal zusammenhängt, ändert daran nichts. — Der Energiestrom ist übrigens von dem elektrischen Strome durchaus zu trennen. So erfolgt ja auch, wie wir in § 111 sahen, der Energiestrom in einem Zahnrade oder in einer Riemenscheibe durch die Arme in radialer Richtung, während die Bewegung, die zu dem Energiestrome Veranlassung gibt, eine Rotation ist. Bezeichnen wir die Bewegung eines ponderablen Körpers als einen „Massenstrom", so können wir dies so ausdrücken, dass schon im Bereiche der gewöhnlichen Mechanik der Energiestrom nicht immer einfach gleich gerichtet mit dem Massenstrome ist, dass also die Energie nicht von den Massen wie in einem Vehikel mitgenommen wird, sondern unter Umständen ganz andere Bahnen einschlägt wie die Massen. So kann es daher auch bei dem elektrischen Strome sein.

In der Umgebung eines stationären elektrischen Stromes, der in einer lang dahin gestreckten Leitung, etwa in einem Telegraphendrahte fliessen mag, bildet sich zugleich ein elektrostatisches und ein magnetisches Feld aus. Betrachten wir einen verhältnissmässig kurzen Abschnitt des Drahtes (etwa von einigen Metern Länge), so ändert sich das elektrostatische Potential darauf nur wenig. Die elektrischen Kraftlinien, die von den freien elektrischen Ladungen der Drahtoberfläche in die Umgebung ausgestrahlt werden, vertheilen sich daher in der nächsten Nachbarschaft des Drahtes, wo das elektrische Feld noch eine grössere Intensität hat, nahezu so, als wenn der ganze Draht zu demselben Potentiale geladen wäre und elektrisches Gleichgewicht herrschte. Diese Kraftlinien strahlen also nahezu senkrecht zur Drahtoberfläche oder sie gehen, auf den Querschnitt des Drahtes bezogen, nahezu in radialer Richtung in das Dielektricum aus. Die magnetischen Kraftlinien bilden dagegen bekanntlich concentrische Kreise.

Wendet man nun auf dieses System Gleichung (267) an und unterdrückt dabei curl $\mathfrak{K}$, so erhält man einen Energiestrom, der senkrecht zu $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ steht, nahezu also mit der Drahtachse parallel geht. Er erstreckt sich in der Hauptsache auf das Dielektricum und ist in der nächsten Nachbarschaft der Drahtoberfläche am grössten. Im Innern des Drahtes ist $\mathfrak{E}$ axial gerichtet, dabei aber viel kleiner als an der Oberfläche. Der Energiestrom geht daher hier in radialer Richtung. Wie schon bemerkt, hat auch der Energiestrom im Dielektricum eine kleine radiale Componente; von dieser bildet der in der Metallmasse festgestellte Energiestrom die Fortsetzung. Auf diesem Wege wird nämlich jedem Volumenelemente des Drahtes vom Dielektricum her jene Energiemenge zugeführt, die es für die Bestreitung der Joule'schen Wärme bedarf. Der Hauptstrom der Energie geht aber, wie man sieht, durch das Dielektricum und nach der Endstation des Telegraphendrahtes gelangt die Energie überhaupt nur auf diesem Wege. Die kleinen Abzweigungen von diesem Hauptstrome, also die Radialcomponenten des Energiestromes, dienen nur zur Versorgung des Drahtes mit der Energie, die er zur Aufrechthaltung des Zwangszustandes in seiner Masse und daher auch im Felde bedarf.

Diese ganze Schilderung des Vorgangs klingt sehr bestechend; wir sehen ein klares und bis in die Einzelzüge hinein folgerichtig in sich zusammenhängendes Bild des Vorgangs vor Augen. Es mag ja auch sein, dass es die Wahrheit trifft; ich selbst vermag allerdings vorläufig nicht daran zu glauben.

Wir dürfen nämlich nicht vergessen, dass diese ganze Betrachtung auf der willkürlichen Unterdrückung des Gliedes curl $\mathfrak{K}$ in Gleichung (267) beruht. Dabei gleicht aber der Fall in hohem Grade dem am Schlusse des vorigen § behandelten. Dort lag es aber viel näher, über das Glied curl $\mathfrak{K}$ so zu verfügen, dass der Energiestrom verschwand. — Auch hier bleibt in der Umgebung des stationären Stromes der Energieinhalt überall constant. Es liegt daher nahe genug, das Glied curl $\mathfrak{K}$ so zu wählen, dass, wie vorher, die Energieströmung im Dielektricum völlig verschwindet. Dies ist in der That stets möglich.

Mit der Maxwell'schen Theorie ist daher die Vertheilung des Energiestromes über die Massen des elektrischen Leiters ebensowohl vereinbar wie die von Poynting angenommene Vertheilung über das Dielektricum.

Fünfter Abschnitt.

Die Elektrodynamik bewegter Leiter.

Erstes Capitel.

Die durch Bewegungen inducirte elektromotorische Kraft.

§ 114. Relative und absolute Bewegung im Raume.

Den Untersuchungen der Kinematik, der allgemeinen Bewegungslehre, liegt meistens das Axiom zu Grunde, dass es bei den Beziehungen der Körper zu einander nur auf die Relativbewegungen ankomme. Von einer absoluten Bewegung im Raume könne gar keine Rede sein, da jedes Mittel fehle, eine solche Bewegung zu konstatiren, wenn kein Vergleichskörper vorhanden wäre, von dem aus sich die Bewegung beobachten und ausmessen liesse.

Bei der Aufstellung dieses Axioms stützt man sich auf den Begriff des leeren Raumes, wie er in den geometrischen Betrachtungen aufgefasst wird und der zweifellos als eine Abstraction aus der Erfahrung anzusehen ist. Ich sage „zweifellos“, indem ich dabei an die Ueberzeugung denke, die der Physiker gewinnt, wenn er Umschau darüber hält, wie die scheinbar unerschütterlich begründeten Anschauungen über die Körperwelt doch immer in stetiger Weiterbildung und Umbildung begriffen sind, nicht an den Philosophen, nach dessen Ueberzeugung der Raumbegriff schon a priori vorhanden sein muss, um die Erfahrungen über die sich im Raume abspielenden Ereignisse erst zu ermöglichen.

Sehen wir den Raum als vollständig leer an, so ist das angeführte Axiom der Bewegungslehre in der That eine selbstverständliche und unerlässliche Forderung unserer heutigen Raumvorstellungen. Sowohl nach der Maxwell'schen Theorie als nach den Lehren der Optik kommen aber „leere" Räume in der Wirklichkeit überhaupt nicht vor. Auch das sogenannte Vacuum ist noch mit einem Medium, dem Aether, angefüllt. Sobald wir dies beachten, wird aber der Begriff der absoluten Bewegung sofort verständlich: es ist die relative Bewegung zu dem den Raum ausfüllenden Medium.

Hier ist jedoch noch eine weitere Bemerkung einzuschalten. Bis jetzt ist es nämlich noch zweifelhaft, ob wir uns vorzustellen haben, dass ein sich bewegender Körper den Aether in seinem Innern und theilweise auch den in seiner Nachbarschaft bei der Bewegung mit sich führt oder ob der Aether an den Bewegungen der Materie ganz unbetheiligt ist. Im letzten Falle würde man zu dem Schlusse geführt, dass das Vorhandensein des Aethers den Raum überhaupt erst bedingt, dass die Vorstellung eines Raumes ohne diesen Inhalt einen Widerspruch bedeutete, etwa wie wenn man sich einen Wald ohne Bäume denken wollte.*) Der absolut leere Raum wäre dann überhaupt kein Gegenstand einer möglichen Erfahrung mehr, oder mit anderen Worten, wir müssten die uns aus den vorher-

*) Zum mindesten ist zu schliessen, dass ein Raum ohne Aetherinhalt ebensogut vierdimensional als dreidimensional sein könnte, denn die Annahme der vierten Dimension verstösst an sich, wie die Anläufe zu einer mehrdimensionalen Geometrie beweisen, nicht gegen die Denkgesetze. Wenn ein Raum von vier Dimensionen irgendwo physikalische Existenz hätte, würde sich, wie hiernach anzunehmen ist, der menschliche Verstand auch in diesem ebenso wie jetzt in dem dreidimensionalen zurecht zu finden wissen, — endgültig freilich nur mit Zuhülfenahme der Anschauung, also der Erfahrung. — Die Eigenschaft der dreifachen Ausdehnung des Raumes ist eine Erfahrungsthatsache, die nur aus der Beobachtung in dem uns erreichbaren physikalisch existirenden, äthererfüllten Raume entnommen ist und daher keineswegs auf einen fingirten leeren Raum mit Nothwendigkeit übertragen werden muss.

gehenden Entwickelungszeiten menschlichen Denkens überkommenen Raumvorstellungen einer durchgreifenden Revision unterziehen.

Die Entscheidung der soeben berührten Frage bildet vielleicht die wichtigste Aufgabe der Naturforschung unserer Zeit. Wie diese Entscheidung aber auch ausfallen möge, der Begriff der absoluten Bewegung wird durch sie nicht gefährdet. Führt ein bewegter Körper einen Theil des Aethers mit sich fort, so ist als absolute Bewegung des Körpers jene zu verstehen, die er relativ zu dem nicht in Mitleidenschaft gezogenen, weiter ab liegenden Aether ausführt.

Zu der Anschauung, dass es absolute Bewegungen im Raume geben muss, werden wir übrigens, worauf von C. Neumann längst hingewiesen wurde, mit Nothwendigkeit durch das Gesetz der Trägheit geführt. Auch die Gültigkeit des Energieprincips ist davon abhängig. Von dem Gesetze der Trägheit erkennt man dies sofort, wenn man die Bewegung eines materiellen Punktes, der ganz sich selbst überlassen ist, relativ zu einem selbst in beliebiger Bewegung begriffenen Raume betrachtet. In der That gilt ja z. B. für den irdischen Raum, wie aus der Ablenkung des Foucault'schen Pendels u. s. w. bekannt ist, das Trägheitsgesetz überhaupt nicht streng; es gilt nur für den durch die Kopernikanischen Vorstellungen über die Bewegungsvorgänge im Sonnensysteme definirten Raum. Bis auf Weiteres müssen wir daher als absolute Bewegungen jene relativ zu diesem Kopernikanischen Raume ansehen.

§ 115.

Wenn wir im Folgenden von den Sätzen der Kinematik über die Relativbewegungen Gebrauch machen wollen, müssen wir bei dieser Sachlage mit Vorsicht verfahren. Wir dürfen es nicht a priori als feststehend ansehen, dass es z. B. gleichgültig ist, ob ein Magnet sich in der Nähe eines ruhenden elektrischen Stromkreises oder ob dieser sich bewegt, während der Magnet ruht, falls nur in beiden Fällen die Relativbewegung die gleiche ist.

Um diese Frage zu entscheiden, betrachte man noch einen dritten Fall. Der Magnet möge sich nämlich so bewegen wie im ersten Falle und der Stromkreis entgegengesetzt wie im zweiten Falle. Relativ zu einander sind dann beide Körper in Ruhe, zusammen führen sie aber eine absolute Bewegung im Raume aus. Andere als die von den beiden Körpern herrührenden Einflüsse seien von dem raumerfüllenden Mittel hierbei ganz ferngehalten; wir abstrahiren also z. B. von dem magnetischen, elektrostatischen und auch von dem Gravitationsfelde der Erde. Die Erfahrung weist uns darauf hin, dass in diesem Falle die absolute Bewegung für sich gar keine elektrischen oder magnetischen Kräfte in den beiden Körpern zu Stande bringt. — Man könnte versucht sein, die Berufung auf die Erfahrung hier als entbehrlich anzusehen, indem man sich dafür auf das Energieprincip stützte. Aber auch dann läuft eine Voraussetzung mit unter, die der Bestätigung durch die Erfahrung bedarf, nämlich die, dass das Trägheitsgesetz in diesem Falle unverändert anwendbar bleibt, dass also keine Umwandlung von kinetischer Energie in elektrische und aus dieser in Joule'sche Wärme vorkommt.

Nach den vorliegenden Erfahrungen dürfen wir es aber als festgestellt ansehen, dass sich die beiden Körper in dem dritten Falle nicht anders zu einander verhalten wie im Zustande der Ruhe. Daraus folgt dann, dass die Bewegung, die wir dem einen Körper in diesem Falle ertheilten, die Einwirkung der anderen gerade überall aufhebt und dass ferner in den beiden zuerst besprochenen Fällen das Resultat überall das gleiche ist. Erst nach diesem Ergebnisse sind wir zu der Annahme berechtigt, dass es bei der Wirkung der beiden Körper aufeinander in der That nur auf die Relativbewegung zwischen ihnen ankommt.

Dass eine so sorgfältige Untersuchung durchaus erforderlich war, erkennt man noch besser daraus, dass sie nicht in allen Fällen zu dem gleichen Ergebnisse führt. Man betrachte z. B. zwei elektrisch geladene Körperchen (materielle Punkte), die sich in parallelen Bahnen mit gleicher Geschwindigkeit neben einander herbewegen. Sie sind in relativer Ruhe zu einander, dabei wirken sie aber mit ganz anderen Kräften aufeinander, als wenn sie auch in absoluter Ruhe wären. Die Bewegung durch das Medium führt hier zu elektrischen Convections- und Verschiebungsströmen und im Zusammenhange damit zu einem magnetischen Felde, das im Zustande absoluter Ruhe fehlt. Hier bringt also in der That, wenn wir auch alle äusseren störenden Einflüsse fern halten und uns die beiden Körperchen allein im äthererfüllten Raume denken, so dass gar kein Vergleichskörper vorhanden ist, von dem aus wir die Bewegung beobachten könnten, doch die absolute Bewegung für sich schon, — die nach dem im vorigen § besprochenen Axiome der Kinematik sich von dem Zustande der Ruhe gar nicht unterscheiden liesse — einen ganz bestimmten Einfluss hervor. In Fällen dieser Art hängt die Wirkung der Körper aufeinander demnach nicht von ihrer Relativbewegung allein ab.

Diese Betrachtungen zeigen deutlich, mit welchen Schwierigkeiten die Behandlung der Elektrodynamik eines Systemes bewegter Körper heute zu kämpfen hat. Vermeintlich sicher begründete Vorstellungen, mit denen wir wie mit Thatsachen zu rechnen gewohnt waren, erweisen sich als unzuverlässig, sobald wir das Material kritisch zu sichten beginnen und der Verdacht wird dadurch geweckt, dass vielleicht auch noch Manches von dem, was wir jetzt zu den unerschütterbaren Grundlagen unserer Naturanschauung rechnen, im Laufe der spätern Entwickelung der Wissenschaft den Nimbus der unbedingten Gültigkeit verlieren könnte. Und doch sind es andererseits auch wieder gerade diese Schwierigkeiten, aus denen wir die zuversichtliche Hoffnung auf weitere Aufschlüsse schöpfen dürfen. Wenn die Frage, ob sich der Aether mit den Körpern bewegt oder sich indifferent zu den Bewegungen der Körper verhält, auf unsere Schlüsse ohne Einfluss bliebe und die Entscheidung nicht in manchen Fällen zweifelhaft liesse, fehlte uns jedes Mittel, diese Frage ihrer einstigen Lösung entgegen zu führen.

§ 116. Gleitstellen.

Ich betrachte jetzt einen ganz einfachen, aber principiell wichtigen Fall. Ein permanenter Magnet bewege sich irgendwie im Raume; es handelt sich darum, die jetzt mit $\mathfrak{E}_b$ bezeichnete elektrische Kraft zu bestimmen, die dadurch in der Nachbarschaft inducirt wird.

Diese Kraft äussert sich nicht in einem leeren Raume, sondern entweder in dem Aether oder in einem Körper. Nach dem, was in § 114 über den Aether bemerkt wurde, sind wir im Zweifel, ob die Relativbewegung des Magneten gegen den Aether in seiner Umgebung zugleich die absolute Bewegung des Magneten darstellt oder nicht. Wollten wir annehmen, dass der benachbarte Aether die Bewegung eines Körpers bis auf grössere Entfernungen mitmachte, so hätten wir zu schliessen, dass die Magnetbewegung keine elektrischen Kräfte $\mathfrak{E}_b$ von merklichem Betrage im Aether induciren könne, da sich beide dort, wo das magnetische Feld von grösserer Intensität ist, nahezu in Ruhe relativ zu einander befinden. Wir wollen, um dieser Ueberlegung einen kürzeren und schärferen Ausdruck zu geben, sagen, dass der Magnet während der Bewegung auf einen sich mit ihm zusammen bewegenden Raum keine inducirende Kraft ausübt (vgl. § 115).

Nehmen wir dagegen in der Nachbarschaft des bewegten Magneten einen zweiten Körper an, der sich in Ruhe befindet, so brauchen wir nicht mehr im Zweifel zu sein, dass in diesem zugleich auch der Aether ruht. Denn entweder nimmt der Aether überhaupt nicht an den Körperbewegungen Theil, ruht also immer, oder er macht die Bewegung des mit ihm räumlich zusammenfallenden Körpers mit, wird also auch, wenn dieser Körper ruht, von ihm in der Ruhe zurückgehalten. Die Aufgabe, um die es sich jetzt handelt, besteht besonders darin, die in dem ruhenden Körper oder, wie wir auch sagen können, die auf einen in absoluter Ruhe verharrenden Raum bezogene inducirte elektrische Kraft $\mathfrak{E}_b$ zu ermitteln. Denn dass sie für den sich mit dem Magneten bewegenden Raum (oder mit anderen Worten für den von dem Magneten aus ausgemessenen Raum) gleich Null zu setzen ist, ergab sich schon vorher. Wie sich die Kraft $\mathfrak{E}_2$ nun in Wirklichkeit im freien Aether in der Nachbarschaft vertheilt, wissen wir nicht. Entweder ist es die Kraft relativ zu einem in absoluter Ruhe befindlichen Raume oder sie liegt zwischen dieser und Null, jenachdem die in § 114 erörterte Frage zu entscheiden ist. Darauf kommt es für unsere Zwecke vorläufig aber auch gar nicht an, da wir nur die in ruhenden Körpern inducirte Kraft ermitteln wollen.

Zugleich führt uns diese Betrachtung aber auf eine Bemerkung von grösster Wichtigkeit. Wenn sich nämlich ein Magnet bewegt, ist der Werth der von ihm inducirten elektrischen Kraft abhängig davon, auf welchen Raum wir sie (in dem vorher erläuterten Sinne) beziehen. Ausser den beiden Räumen, die wir bisher betrachteten und von denen der eine absolut ruhte, der andere sich mit dem Magneten bewegte, können wir uns nämlich noch beliebige andere bewegte Räume hinzudenken, die sich durch entsprechend bewegte Körper verwirklichen liessen. Jenachdem ein gegebener Punkt zu dem einen oder anderen dieser Räume gerechnet wird, fällt die Kraft $\mathfrak{E}_2$ verschieden für ihn aus.

Diese Betrachtung entspricht genau einer aus der Mechanik des materiellen Punktes bekannten. Rechnen wir den Punkt zu einem anderen als dem vorher benutzten Raume, so müssen wir nach dieser eine mechanische Zusatzkraft anbringen oder auch mit andern Worten, die Resultirende aus allen Kräften an dem materiellen Punkte nimmt verschiedene Werthe an, je nach der Zugehörigkeit des Punktes zu dem einen oder anderen dieser Räume.

So ist es also auch mit den inducirten elektrischen Kräften. Betrachten wir nun eine Grenzfläche zwischen zwei Räumen, so also, dass auf der einen Seite alle Punkte zu einem, die auf der anderen Seite zu einem zweiten, unabhängig von dem ersten bewegten Systeme gehören; vorausgesetzt wird dabei, dass die Bewegung derart erfolge, dass sich eine solche Abgrenzung beider Räume dauernd aufrecht erhalten lässt. (Entlanggleiten längs der Grenzfläche, Drehung um eine gemeinsame Achse u. s. w.)

Denken wir uns den einen Raum nach allen Seiten hin unbegrenzt fortgesetzt, so müssen wir annehmen, dass die inducirte Kraft $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}$ für ihn überall solenoidal vertheilt ist, da sie von in sich geschlossenen und auf diesen Raum bezogenen magnetischen Strömen herrührt, denn sie ist dann in jeder Hinsicht gleichwerthig mit der im vorigen Abschnitt besprochenen inducirten Kraft $\mathfrak{E}_m$. Für den andern Raum gilt natürlich dasselbe. Nun sind die beiden Räume aber nicht in dieser unverkürzten Ausdehnung vorhanden. Der Kraftfluss $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}$ endet für jeden an der Grenzfläche, oder findet, wenn man will, seine Fortsetzung durch den Kraftfluss $\mathfrak{E}_\mathfrak{b}$ im anderen Raume. An der Grenzfläche selbst haben wir eine Stetigkeitsunterbrechung. Wir können uns diese zwar, wie die früher betrachteten schroffen Uebergänge, dadurch ersetzt denken, dass die Grenzfläche zu einer Grenzschicht erweitert wird, in der ein allmählicher Uebergang aus dem Bewegungszustande des einen Raumes in den des andern stattfindet. Dadurch ändern wir aber nichts an der Thatsache, dass wir nun in dem gemischten Systeme („gemischt“ weil zwei zu verschieden bewegten Räumen gehörige Körper darin vorkommen) an der Uebergangsstelle Anfangs- und Endpunkte von Kraftlinien haben.

In diesen Bemerkungen ist die Theorie der Gleitstellen enthalten. Zwei Leiter können mechanisch getrennt, aber elektrisch verbunden sein, so dass sie einen einzigen Stromkreis ausmachen, während sie kinematisch betrachtet, ein „gemischtes“ System bilden. Das Linienintegral der elektrischen Kraft (die elektromotorische Kraft) ist in solchen Fällen in so viele Theile zu zerlegen, als verschieden bewegte Räume vorkommen.

§ 117. Bewegter Magnet und ruhender Leiter.

Wir nehmen die im Eingange des vorhergehenden § erörterte Aufgabe jetzt wieder auf und lehnen uns zur Ermittelung der Kraft $\mathfrak{E}_s$ an die Entwicklung in § 101 an. Wie dort handelt es sich auch hier um die Induction in einem ruhenden Leiter; der Unterschied besteht nur darin, dass in § 101 überhaupt keine Bewegungen von Körpern vorausgesetzt wurden, dass die Aenderung von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ vielmehr durch andere Umstände bewirkt sein sollte.

Ietzt nehmen wir umgekehrt an, dass in einem relativ zum Magneten ruhenden Raume die Induction $\mathfrak{B}$ und das Vectorpotential $\mathfrak{A}$ constant seien. Die Differentialquotienten dieser Vectoren nach der Zeit für den ruhenden Raum lassen sich dann leicht mit Hülfe von Raumoperationen gewinnen, wenn die Bewegung des Magneten gegeben ist. Wird ein Punkt P im magnetischen Felde P_1 genannt, wenn er im gegebenen Augenblicke als zum Raume des Magneten gehörig angesehen wird, und P_2, wenn wir ihn zum absoluten Raume rechnen, und nehmen wir ferner einen Punkt O_1 auf dem Magnete an, von dem wir die Radienvectoren $\mathfrak{r}$ rechnen, so kann nach § 10, Gl. (20) die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ von P_1 stets

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{u}\mathfrak{r}$$

gesetzt werden, ist also bekannt, wenn die Vectoren $\mathfrak{v}_0$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{r}$, wodurch die Bewegungsart des Körpers bezw. die Lage von P_1 bestimmt werden, gegeben sind.

Im Zeitelemente dt verschiebt sich P_1 gegen den ruhenden Raum um $\mathfrak{v}dt$. Dabei ändert sich in P_2 der Vector $\mathfrak{B}$ um ebensoviel als wenn man im bewegten Raume von P_1 erstens um $-\mathfrak{v}dt$ weiter geht und zweitens noch den bewegten Raum um $\mathfrak{u}dt$ gegen den festen um den Punkt P_2 dreht. (Wegen der Constanz von $\mathfrak{u}$ für alle Punkte des bewegten Körpers vergl. § 10.) Die erste Aenderung gibt, wenn man den scalaren Factor dt heraushebt, $-(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{B}\cdot dt$ nach dem Begriffe der Operation $(\mathfrak{v}\nabla)$. Um die zweite Aenderung zu ermitteln, bei der nur die Richtung und nicht die Grösse von $\mathfrak{B}$ betheiligt ist, denken wir uns den Vector $\mathfrak{B}$ vom Punkte P_1 aus durch einen Radiusvector bildlich dargestellt. Der Endpunkt dieses Vectors beschreibt bei der Drehung $\mathfrak{u}dt$

ein Linienelement, das nach der oben citirten Gleichung (20) durch

$$\mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{B}\cdot dt$$

nach Grösse und Richtung dargestellt wird. Nach dem Gesetze über die Addition von Vectoren ist aber der Vector in der neuen Richtung gleich der Summe aus dem Vector in der vorhergehenden Lage und aus dem eben bezeichneten Elemente. Dieses selbst stellt also die durch die Drehung im Zeitelemente dt bewirkte Aenderung von $\mathfrak{B}$ dar.

Im Ganzen haben wir also hier

$$\dot{\mathfrak{B}} = -(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{B} + \mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (270)$$

wofür man in leichtverständlicher Abkürzung auch schreiben kann

$$\dot{\mathfrak{B}} = (-(\mathfrak{v}\nabla) + \mathrm{V}\mathfrak{u})\cdot\mathfrak{B}.$$

Der Klammerwerth gibt den zusammengesetzten Raumoperator an, der in unserem Falle der Differentiation eines Vectors nach der Zeit gleichwerthig ist. Ebenso ist natürlich auch

$$\dot{\mathfrak{A}} = -(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{A} + \mathrm{V}\mathfrak{u}\mathfrak{A} = (-(\mathfrak{v}\nabla) + \mathrm{V}\mathfrak{u})\mathfrak{A}.$$

Hierbei ist immer noch

$$\dot{\mathfrak{B}} = \operatorname{curl}\dot{\mathfrak{A}}_{\mathrm{Maxw.}}.$$

Man sieht dies ein, wenn man bedenkt, dass die Raumoperation, durch die $\dot{\mathfrak{A}}$ aus $\mathfrak{A}$ gewonnen wird, einer Differentiation nach der Zeit äquivalent, von der Raumoperation curl daher ganz unabhängig ist, so dass die Reihenfolge zwischen beiden vertauscht werden kann. Will man ganz sicher gehen, so kann man sich aber auch die Mühe nehmen, die Operationen nach Anleitung des ersten Abschnittes dieses Buches sämmtlich durchzuführen, indem man in Componenten zerlegt. Man wird sich dann überzeugen, dass in der That identisch für jeden Vector $\mathfrak{A}$

$$(-(\mathfrak{v}\nabla) + \mathrm{V}\mathfrak{u})\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \operatorname{curl}\cdot(-(\mathfrak{v}\nabla) + \mathrm{V}\mathfrak{u})\mathfrak{A}. \quad (271)$$

ist. — Für die zweite Hauptgleichung (175) erhalten wir demnach hier

$$\mathrm{curl}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = -\,\mathrm{curl}\,(-\,(\mathfrak{v}\nabla) + V\,\mathfrak{u})\,\mathfrak{A}_{\mathrm{Maxw.}}\,,$$

woraus man, wie in § 101, durch Integration findet

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_e + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{A}_{\mathrm{Maxw.}} - V\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{A}_{\mathrm{Maxw.}} + \mathfrak{K}\,.$$

Anscheinend werden wir damit für $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ auf denselben Werth geführt, der in § 101 für $\mathfrak{E}_m$ ermittelt wurde, nämlich auf den Werth $-\,\dot{\mathfrak{A}}_{\mathrm{Maxw.}}$ (vgl. Gl. 227). In Wirklichkeit trifft dies aber nicht zu und zwar deshalb nicht, weil für die Bestimmung der Integrationsconstanten $\mathfrak{K}$ ein anderer Weg eingeschlagen werden muss. In der That ist ja hier keineswegs im ganzen Raume $\mathrm{div}\,\mathfrak{K} = \mathrm{div}\,\mathfrak{E}_e$ und schliesslich $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}_e$, weil die Kraft $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ selbst nicht überall solenoidal vertheilt ist. Im Magnet ist $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ Null und in der Oberfläche bezw. in den Grenzschichten hat $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ daher Divergenz- bezw. Convergenzstellen. Der Vector $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ lässt sich daher in zwei Theile zerlegen, von denen der eine solenoidal und der andere wirbelfrei ist. Der letzte Theil ist identisch mit einem elektrostatischen Kraftflusse, den man sich von fingirten Ladungen auf der Oberfläche des Magneten ausgehend denken kann. Nur der erste, solenoidal vertheilte Bestandtheil des Vectors $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ wird durch $\dot{\mathfrak{A}}_{\mathrm{Maxw.}}$ angegeben; der andere ist in $\mathfrak{K}$ mit enthalten.

Betrachten wir zunächst den ersten Bestandtheil von $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$, also jenen, für den die div zu Null wird und bezeichnen wir ihn mit $\mathfrak{E}'_\mathfrak{v}$ so erhalten wir aus dem vorigen

$$\mathfrak{E}'_\mathfrak{v} = -\,\dot{\mathfrak{A}}_{\mathrm{Maxw.}} = (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{A}_{\mathrm{Maxw.}} - V\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{A}_{\mathrm{Maxw.}}\quad. \tag{272}$$

Dieser Werth lässt sich weiter umformen und zwar führt allgemein der Operator, mit dem wir es hier zu thun haben, in allen Fällen zu demselben Werthe wie ein zweiter, den wir jetzt ableiten wollen. Um den Satz allgemein zu beweisen, nehme ich einen beliebigen, stetig vertheilten Vector $\mathfrak{Z}$ an und denke mir daran die Raumoperation $\{(\mathfrak{v}\nabla) - V\mathfrak{u}\}$

ausgeführt. Nun ist, wie aus der oben angeführten Gleichung für $\mathfrak{v}$ hervorgeht,

$$\nabla v_1 = -\mathfrak{j}u_3 + \mathfrak{k}u_2; \quad \nabla v_2 = \mathfrak{i}u_3 - \mathfrak{k}u_1; \quad \nabla v_3 = -\mathfrak{i}u_2 + \mathfrak{j}u_1$$

und daher nach Gleichung (76)

$$\nabla_{\mathfrak{v}} \mathfrak{Z}\mathfrak{v} = V\mathfrak{Z}\mathfrak{u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (273)$$

Andererseits ist nach Gleichung (85)

$$(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{Z} = V \operatorname{curl} \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{v} + \nabla_{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Z}\mathfrak{v}.$$

Im Ganzen ist daher

$$(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{Z} - V\mathfrak{u}\mathfrak{Z} = V \operatorname{curl} \mathfrak{Z} \cdot \mathfrak{v} + \nabla \mathfrak{Z}\mathfrak{v} \quad . \quad . \quad (274)$$

Im letzten Gliede ist nämlich nach der ersten der Gleichungen (76) das totale ∇ für die Summe der beiden partiellen gesetzt. Achten wir nur auf die Operatoren und lassen den Vector $\mathfrak{Z}$ weg, so lässt sich dies auch in der Form anschreiben

$$\{(\mathfrak{v}\nabla) - V\mathfrak{u}\} = \{\nabla\mathfrak{v} - V\mathfrak{v} \operatorname{curl}\} \cdot \quad . \quad . \quad (275)$$

Auch abgesehen von dem hier behandelten Falle, kann diese Formel oft mit Vortheil verwendet werden.

Bei Anwendung dieser Umformung auf Gleichung (272) erhalten wir

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}' = V \operatorname{curl} \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \cdot \mathfrak{v} + \nabla \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \mathfrak{v},$$

oder auch, wenn wir im ersten Gliede der rechten Seite $\mathfrak{B}$ einführen

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}' = V\mathfrak{B}\mathfrak{v} + \nabla \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \mathfrak{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (276)$$

Ueberzeugen wir uns zunächst davon, dass dieser Theil von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ in der That solenoidal vertheilt ist; nebenher werden wir dabei zu einem Ergebnisse geführt, das für die weitere Betrachtung von Wichtigkeit ist.

Nach Gleichung (81) ist

$$\operatorname{div} V\mathfrak{B}\mathfrak{v} = \mathfrak{v} \operatorname{curl} \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \operatorname{curl}^2 \mathfrak{A} - 2\mathfrak{B}\mathfrak{u} \quad (277)$$

Im letzten Gliede ist für curl $\mathfrak{v}$ der nach Gleichung (49) sich dafür ergebende Werth $2\mathfrak{u}$ eingesetzt. — Andererseits erhalten wir

$$\operatorname{div} \nabla \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \mathfrak{v} = \nabla^2 \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \cdot \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \nabla^2 \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} + 2\mathfrak{u} \operatorname{curl} \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \qquad (278)$$

Bei Ausführung der Operation ∇^2 an $\mathfrak{A}\mathfrak{v}$ ist nämlich auch $\mathfrak{v}$ als veränderlich anzusehen und für die partiellen Differentialquotienten der Componenten von $\mathfrak{v}$ sind die ihnen entsprechenden Componenten von $\mathfrak{u}$ einzuführen (vgl. die der Gleichung 273 vorausgehenden Zeilen).

Beachtet man noch, dass für $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ nach Gleichung (72) curl^2 durch $-\nabla^2$ ersetzt werden kann, so erkennt man, dass in der That

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}' = 0$$

ist.

§ 118. Das Linienintegral von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$.

Die Kraft $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ selbst lässt sich an dem ruhenden Leiter nicht beobachten; nur ihr über den ganzen geschlossenen Stromkreis erstrecktes Linienintegral oder die von dem Magneten inducirte elektromotorische Kraft macht sich durch den entstehenden Inductionsstrom bemerklich. Obschon wir bis jetzt $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ noch nicht vollständig bestimmt haben, da uns noch die Kenntniss des wirbelfreien Bestandtheiles $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}''$ fehlt, können wir doch für den jetzt behandelten Fall die elektromotorische Kraft leicht berechnen, da $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}''$ zu ihr nichts beitragen kann. Dies geht aus § 30 hervor; der curl von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}''$ ist nämlich nach der Art der Zerlegung, die mit $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ vorgenommen wurde, überall auf dem ruhenden Leiter unbedingt Null.

Schreiben wir für die elektromotorische Kraft E, so folgt aus Gleichung (276)

$$E = \int_{P_0}^{P_0} d\mathfrak{s}\, V \mathfrak{B}\mathfrak{v}\,.$$

Das zweite Glied in Gleichung (276) trägt nämlich ebenfalls nichts zu dem Integrale über eine geschlossene Curve bei. Denn nach der Definition der Operation ∇ (bezw. nach Gleichung 36) ist

$$\int_{P_0}^{P_1} \nabla \mathfrak{A}\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{s} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{A}_0\mathfrak{v}_0,$$

also Null, wenn P_1 mit dem Anfangspunkte P_0 des Integrationsweges zusammenfällt.

Nach Gleichung (21) lässt sich der für E gefundene Werth noch auf eine etwas übersichtlichere Form bringen

$$E = \int \mathfrak{B}\, \mathrm{V}\, \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (279)$$

Die geometrische Bedeutung des hierin vorkommenden Vectorproductes folgt leicht aus § 7. Denkt man sich nämlich zuerst mit dem Zeitelemente dt multiplicirt und dann wieder damit dividirt, so ist $\mathrm{V}\mathfrak{v}dt \cdot d\mathfrak{s}$ nach Gleichung (13) gleich dem Inhalte des Parallelogramms, das von dem Linienelemente $d\mathfrak{s}$ relativ zu dem vom Magneten aus ausgemessenen Raume beschrieben wird und dabei senkrecht zur Fläche dieses Parallelogramms gerichtet. Die scalare Multiplication mit $\mathfrak{B}$ liefert daher die magnetische Induction durch dieses Parallelogramm (Oberflächenintegral von $\mathfrak{B}$ über die Fläche erstreckt, oder $\mathfrak{B}\mathfrak{N}df$ nach früherer Bezeichnung). Nach einer anderen, in der Technik gebräuchlichen Bezeichnung, stellt das Element des Integrals in Gleichung (279) die Zahl der Kraftlinien dar, die im Zeitelemente dt das Linienelement $d\mathfrak{s}$ durchschneiden, diese dividirt durch das Zeitelement dt; oder wie man auch sagen kann, die Zahl der in der Zeiteinheit das Linienelement durchschneidenden Kraftlinien.

Aus Gleichung (279) dürfen wir indessen zunächst noch nicht schliessen, dass das unter dem Integralzeichen stehende Element auch wirklich die auf $d\mathfrak{s}$ für sich genommen entfallende elektromotorische Kraft sei. Bei dieser sind vielmehr, wie aus der Ableitung der Formel hervorgeht, noch andere Glieder zu berücksichtigen, die sich bei der Summirung über den ganzen geschlossenen Kreis hinwegheben.

§ 119. **Bewegter Leiter und ruhender Magnet.**

Nach § 115 lässt sich dieser Fall auf den vorigen zurückführen, falls der lineare Leiter sich wie ein starrer Körper bewegt, falls also namentlich keine Gleitstellen in ihm vorkommen.

Verstehen wir jetzt unter $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit eines Punktes des Leiters, so finden wir $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}'$ aus Gleichung (276) durch einen einfachen Vorzeichenwechsel der mit $\mathfrak{v}$ behafteten Glieder; also

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}' = \mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{B} - \nabla \mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \cdot \mathfrak{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (280)$$

Auch hier verschwindet das zweite Glied dieses Ausdrucks und ebenso die zweite bisher unbekannte Componente $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}''$ von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ aus der Formel, wenn wir das Linienintegral der elektrischen Kraft für einen geschlossenen linearen Leiter berechnen.

Anders ist es aber, wenn der Leiter im Sinne von § 116 ein „gemischtes" System darstellt. Wir wollen jetzt annehmen, dass er aus zwei Theilen bestehe, von denen sich jeder für sich wie ein starrer Körper bewegt und die durch zwei Gleitstellen in elektrischem Zusammenhange stehen. Bezeichnen wir die Gleitstellen mit I und II und die Geschwindigkeiten in denselben mit dem Index a oder b, jenachdem sie sich auf den einen oder anderen der auf einander gleitenden Körper beziehen, so wird jetzt das über den ganzen elektrischen Kreis erstreckte Linienintegral $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}'$ gleich

$$\int \mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}' d\mathfrak{s} = \int d\mathfrak{s} \mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{B} - \mathfrak{A}^{\mathrm{I}}(\mathfrak{v}_a^{\mathrm{I}} - \mathfrak{v}_b^{\mathrm{I}}) - \mathfrak{A}^{\mathrm{II}}(\mathfrak{v}_b^{\mathrm{II}} - \mathfrak{v}_a^{\mathrm{II}}) \quad (281)$$

Die Klammerwerthe in den beiden letzten Gliedern geben die relativen Gleitgeschwindigkeiten an den beiden Gleitstellen an. Die Glieder selbst sind von der Form, als wenn in den Gleitstellen elektromotorische Kräfte von den angegebenen Beträgen zu Stande kämen. Der Index Maxw. ist der Kürze halber bei den $\mathfrak{A}$ fortgelassen.

Um die ganze elektromotorische Kraft in dem geschlossenen elektrischen Kreise zu erhalten, muss man aber noch das

Linienintegral der bisher unbekannt gebliebenen Componente $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}''$ hinzufügen. In jedem der beiden bewegten Räumen lässt sich diese von einem Potentiale ableiten, da ihr curl Null ist. Diese Potentiale sind aber in beiden Räumen verschieden. Bilden wir also das Linienintegral von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}''$ und bezeichnen wir jene Potentiale mit Ψ_a bezw. Ψ_b, so erhalten wir dafür

$$(\Psi_b^{\mathrm{I}} - \Psi_a^{\mathrm{I}}) + (\Psi_a^{\mathrm{II}} - \Psi_b^{\mathrm{II}}).$$

Auch dieser Werth besteht aus der Summe von zwei Potentialunterschieden, also von zwei elektromotorischen Kräften an den Gleitstellen. Schreibt man der Kürze halber für die Differenzen an den Gleitstellen, z. B. für $\mathfrak{v}_a - \mathfrak{v}_b$ jetzt $\mathfrak{v}_{a,b}$, so wird schliesslich die elektromotorische Kraft

$$E = \int d\mathfrak{s} \, \mathrm{V} \mathfrak{v} \mathfrak{B} - (\mathfrak{A}^{\mathrm{I}} \mathfrak{v}^{\mathrm{I}}_{a,b} + \Psi^{\mathrm{I}}_{a,b}) + (\mathfrak{A}^{\mathrm{II}} \mathfrak{v}^{\mathrm{II}}_{a,b} + \Psi^{\mathrm{II}}_{a,b}) \quad (282)$$

Auch hier beziehen sich die Klammerwerthe wieder nur auf Differenzen der Werthe $\mathfrak{A}\mathfrak{v} + \Psi$ an den Gleitstellen, die von der besonderen Form der Leiter ganz unabhängig sind. Sie entsprechen den elektromotorischen Kräften an „Stromenden“, zu denen man nach der Fernwirkungstheorie bei der Behandlung „offener“ Stromkreise geführt wird.

Nach dem Inductionsgesetze müssen wir aber schliessen, dass diese Glieder gleich Null zu setzen sind. Denn das Inductionsgesetz sagt aus, dass für jeden elektrisch geschlossenen Kreis, wenn er auch wie hier aus zwei mechanisch getrennten Theilen besteht, die elektromotorische Kraft dem magnetischen Strome durch eine von dem Kreise umschlossene Fläche numerisch gleich ist. Aus den auf Gleichung (279) folgenden Erörterungen folgt aber, dass schon das erste Glied diesen magnetischen Strom vollständig darstellt; die beiden anderen Glieder müssen also zusammen genommen verschwinden. Damit dies aber für jede beliebige Anordnung der Gleitstellen und für jede Art der Bewegung der beiden Körper zu einander möglich ist, müssen sie auch einzeln Null sein. In jedem Körper haben wir daher

$$\Psi = -\mathfrak{A}\mathfrak{v}.$$

und demnach

$$\mathfrak{E}_\mathfrak{v}'' = \nabla \mathfrak{A}\mathfrak{v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (283)$$

zu setzen. Die gesammte durch die Bewegung inducirte Kraft $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ ergibt sich hiernach mit Rücksicht auf Gleichung (280) zu

$$\mathfrak{E}_\mathfrak{v} = V\mathfrak{v}\mathfrak{B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (284)$$

die mit Aenderung des Vorzeichens von $\mathfrak{v}$ auch für den im vorigen § behandelten Fall anwendbar ist. Zugleich findet damit das am Schlusse des vorigen § erhobene Bedenken seine Erledigung.

Aus Gleichung (278) folgt noch

$$\operatorname{div} \mathfrak{E}_\mathfrak{v}'' = \mathfrak{v}\nabla^2\mathfrak{A} + 2\mathfrak{u}\mathfrak{B} \quad . \; . \; . \; . \quad (285)$$

Wir lernen damit auch die fingirten elektrischen Massen kennen, die einen dem $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}''$ äquivalenten elektrostatischen Kraftfluss hervorzubringen vermöchten. Ueberall wo curl $\mathfrak{B}$ Null ist, wo also in Medien von constanter Permeabilität keine elektrische Strömung auftritt, ist die zu fingirende Raumvertheilung freier elektrischer Massen gleich $\mathfrak{u}\mathfrak{B}/2\pi$ oder, falls es sich nur um eine Translation handelt, gleich Null.

Wird z. B. ein Gleitstück auf zwei parallelen geraden Schienen in einem constanten magnetischen Felde verschoben, so tritt in dem Gleitstücke, das die beiden ruhenden Schienen überbrückt, die durch Gleichung (284) angegebene inducirte Kraft auf. Sie hat für jede Längeneinheit des Gleitstückes denselben Werth und im Gleitstücke selbst keine Divergenz- oder Convergenzstellen, wohl aber an den beiden Gleitstellen. Hier beginnt bezw. erlischt dieser Kraftfluss $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ und die Intensität der Divergenz oder Convergenz ergibt sich aus den Differenzen der $\mathfrak{A}\mathfrak{v}$.

Auch wenn keine Gleitstellen im gewöhnlichen Sinne des Wortes vorkommen, treten in einem bewegten Leiter Divergenzstellen des Kraftflusses $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ auf. Man verschiebe z. B. einen Drahtring parallel zu seiner Ebene im magnetischen Felde der Erde. Die inducirte elektromotorische Kraft für den ganzen geschlossenen Ring ist dann Null; dabei wird aber die eine

Hälfte des Drahtringes positiv, die andere negativ geladen. Zu dem Kraftflusse $\mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}$ gesellt sich ein elektrostatischer Kraftfluss, so dass die Summe beider überall im Metalle zu Null wird.

§ 120. Auffassung der Kräfte $\mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}$ als eingeprägte.

Das Resultat, zu dem wir durch die Untersuchung über die Kraft $\mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}$ gelangt sind, ist unstreitig recht befremdend. Man denke an den in § 117 behandelten Fall; der Leiter ruhte hier und die Aenderung des Feldes wurde nur durch die Bewegung des Magneten veranlasst. Offenbar hätte man dieselbe Aenderung des Feldes in der Umgebung des Leiters auch auf andere Art herbeiführen können. Man konnte z. B. von vornherein den Magneten durch ein System Ampère'scher Ströme ersetzen und die Raumvertheilung dieser Ströme etwa durch Aenderungen im Leitungswiderstand des von ihnen durchflossenen Körpers in eine andere überführen. In diesem Falle hätten wir es nur mit ruhenden Körpern zu thun und für die inducirte Kraft, die dann als $\mathfrak{E}_m$ zu bezeichnen ist, nach den Lehren des vorigen Abschnitts (Gl. 227) überall $-\dot{\mathfrak{A}}_{\text{Maxw.}}$ zu setzen. Sobald aber dieselbe Feldänderung durch die Verschiebung des Magneten bewirkt wird, gilt dies nicht mehr, sondern wir haben noch $\mathfrak{E}_{\mathfrak{b}}''$ oder $-\nabla\mathfrak{A}\mathfrak{v}$ hinzuzufügen.

Das ist offenbar schwer begreiflich, denn gerade nach der Maxwell'schen Theorie muss man annehmen, dass nur der Zustand des Feldes in der unmittelbaren Nachbarschaft die resultirende Wirkung an jeder Stelle bedingt, ohne Rücksicht darauf, auf welche Ursachen in weiter abliegenden Theilen des Feldes dieser Zustand zurückzuführen ist. Oder sollten sich beide Fälle dadurch von einander unterscheiden, dass der bewegte Magnet den Aether der Nachbarschaft mit sich führt? Dann wäre freilich der Zustand des Feldes durch die Grössen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ noch nicht hinreichend bestimmt. Man könnte auch daran zweifeln, ob die vorliegenden experimentellen Thatsachen in der That hinreichen, um das Inductionsgesetz in seiner gegenwärtigen Form auch für den Fall, dass der Leiter Gleitstellen enthält, als streng bewiesen anzusehen. Sollten sich nicht vielleicht die auf die Gleitstellen bezüglichen Glieder in Gleichung (282) der Beobachtung bisher entzogen haben? Der wechselnde Uebergangswiderstand an den Gleitstellen könnte sie leicht verdeckt haben, denn wie die Durchrechnung eines Zahlenbeispieles lehrt, wird nur in aussergewöhnlichen Fällen $\mathfrak{A}\mathfrak{v}_{a,b}$ für eine Gleitstelle mehr als 1 Volt betragen, gewöhnlich aber viel kleiner sein. Auch der Einwand, dass die Energiebeziehungen (der erste Hauptsatz) die Nichtexistenz dieser Glieder bestätigten, ist nicht stichhaltig, da sich ein entsprechender calorischer Effect (ähnlich dem Peltiereffect) an den Gleitstellen der Beobachtung erst recht entzogen haben könnte. Eine dritte Möglichkeit zur Erklärung des Widerspruches würde sich dadurch ergeben, dass man annähme, auch schon die absolute Bewegung, die man einem Magneten und einem mit diesem fest verbundenen Leiter ertheilt, vermöge in diesem, entgegengesetzt der in § 115 erörterten Annahme, elektrische Kräfte zu induciren. Eine Consequenz hiervon wäre, dass auch schon ein sich allein im Aether, fern von allen anderen Körpern bewegender Stahlmagnet in Folge der Bewegung eine elektrische Ladung annehmen müsste.

Alle diese Fragen müssen vorläufig unbeantwortet bleiben. Auf jeden Fall nehme ich indessen weiterhin an, dass das Inductionsgesetz ohne Aenderung auch für Leiter mit Gleitstellen gültig bleibt und dass daher $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ durch Gleichung (284) richtig angegeben wird. Maxwell selbst und die meisten seiner Nachfolger haben diesen Werth von $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ angenommen*) und ich schliesse mich ihnen an, nachdem ich darauf hingewiesen habe, dass immerhin noch ein gewisser Zweifel möglich ist, der nur durch das Experiment gehoben werden kann.

Von $\mathfrak{E}_m$ unterscheidet sich nun $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$ durch das neu hinzugetretene Glied $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}''$. Es ist desshalb nicht mehr zulässig, beide

*) J. J. Thomson hat sich in seinen neuesten Arbeiten indessen im entgegengesetzten Sinne entschieden und betrachtet den in Gl. (280) gegebenen Werth von $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}'$ als das totale $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$, setzt also $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}'' = 0$.

in allen Fällen zur gemeinsamen weiteren Behandlung zu vereinigen, wie es sonst am nächsten liegen würde. Macht sich die Absonderung nöthig, so liegt es nahe, $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ sofort mit zu den eingeprägten Kräften $\mathfrak{E}_e$ zu schlagen. Im Ganzen setzt sich ja nach den bisherigen Untersuchungen die ganze Kraft $\mathfrak{E}$ aus folgenden Theilen zusammen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_m + \mathfrak{E}_{\mathfrak{v}} + \mathfrak{E}_s + \mathfrak{E}_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (286)$$

Das letzte Glied umfasst hierbei die Summe der hydroelektrischen, thermoelektrischen, pyroelektrischen Kräfte u. s. w., die wir stets zu den eingeprägten gerechnet haben. Es steht uns aber auch frei, die durch Bewegungen der Körper inducirte Kraft $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ in die Summe der eingeprägten Kräfte mit einzurechnen. In der zweiten Hauptgleichung

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = -\dot{\mathfrak{B}}$$

ist in diesem Falle unter $\dot{\mathfrak{B}}$ eine partiell nach der Zeit genommene Differentation zu verstehen.

Im anderen Falle gilt die zweite Hauptgleichung indessen ebenfalls unverändert; nur ist dann die Differentation an $\mathfrak{B}$ total auszuführen. Unterscheidet man wie gewöhnlich die partielle Differentation von der totalen durch runde ∂, so ist (vgl. § 117)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \pm ((\mathfrak{v}\nabla) - V\mathfrak{u}).$$

Das Vorzeichen vor der Klammer bestimmt sich danach, ob sich die Bewegung $\mathfrak{v}$ auf den Körper bezieht, den wir betrachten, oder auf das Feld.

Bildet man den curl von $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ unmittelbar nach Gleichung (284), so erhält man nach dem Rechengesetze Gleichung (84)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E}_{\mathfrak{v}} = (\mathfrak{B}\nabla)\,\mathfrak{v} - (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{B},$$

denn die beiden anderen Glieder in Gleichung (84) fallen hier fort, da nicht nur div $\mathfrak{B}$, sondern auch div $\mathfrak{v}$ (Gl. 51) Null ist. Für $(\mathfrak{B}\nabla)\,\mathfrak{v}$ erhalten wir, wenn wir den Werth von $\mathfrak{v}$ aus Gleichung (20) einsetzen,

$$(\mathfrak{B}\nabla)\,\mathfrak{v} = (\mathfrak{B}\nabla)\,V\mathfrak{u}\mathfrak{r} = V\mathfrak{u}\mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad (287)$$

Der zuletzt angegebene Werth folgt nicht aus einer allgemeinen Formel, sondern ergibt sich nur mit Rücksicht darauf, dass $\mathfrak{r}$ ein Radiusvector und $\mathfrak{u}$ für den ganzen Körper constant ist. Die wirkliche Durchführung der Operationen nach den dafür aufgestellten Rechenvorschriften liefert aber mit Leichtigkeit den Nachweis, dass der zuletzt angegebene Werth dem ihm vorhergehenden gleich ist.

Im Ganzen ist daher

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E}_{\mathfrak{v}} = -(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{B} + V\mathfrak{u}\mathfrak{B}$$

und das ist in der That das Negative jenes Theiles von $\dot{\mathfrak{B}}$ der durch die Ortsänderung des Körpers bedingt wird.

Dass diese Probe zutreffen müsse, geht übrigens schon daraus hervor, dass $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ von vornherein durch Folgerung aus der zweiten Hauptgleichung abgeleitet wurde und diese daher nothwendig erfüllen muss, wenn kein Fehler in der Ableitung begangen wurde.

Bei der Anwendung der zweiten Hauptgleichung steht demnach nichts im Wege, die beiden inducirten Kräfte $\mathfrak{E}_m$ und $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ zu vereinigen und dann unter $\dot{\mathfrak{B}}$ den totalen Differentialquotienten nach der Zeit zu verstehen. Dieses Vorgehen empfiehlt sich auch um so mehr, als nur dann $\dot{\mathfrak{B}}$ den magnetischen Strom $\mathfrak{g}$, bezogen auf den vom inducirten Körper aus ausgemessenen Raum darstellt.

Sobald man aber von der zweiten Hauptgleichung zu ihrem Integrale übergeht, also mit dem Vectorpotentiale operirt, stellt sich der besprochene Unterschied ein und $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ ist von $\mathfrak{E}_m$ getrennt zu halten.

§ 121. **Unipolare Induction.**

Als unipolare Induction bezeichnet man das Auftreten inducirter elektrischer Kräfte in Folge der Rotation eines stabförmigen permanenten Magneten um die Stabachse. Mit Recht hat man diesem Phänomen von jeher ein lebhaftes

Interesse entgegen gebracht; es soll daher auch hier etwas eingehender behandelt werden.

Zunächst ist zu erwähnen, dass die unipolare Induction nur dann zur Erzeugung eines Stromes führt und sich überhaupt nur dann bemerklich macht, wenn die geschlossene metallische Leitung im Sinne von § 116 ein gemischtes System bildet, also aus mindestens zwei Theilen besteht, die zu verschieden bewegten Räumen gehören. Gewöhnlich ist der eine dieser beiden Theile der elektrisch leitende Körper des Magneten selbst, der andere eine Drahtschlinge, die durch die eine Gleitstelle mit dem cylindrischen Mantel und durch die zweite mit der Polfläche (meist auf der Rotationsachse) des Magneten elektrisch verbunden ist. Fallen die Gleitstellen fort, rotirt also die Drahtschlinge mit dem Magneten, so tritt kein Inductionsstrom auf und dem entsprechend ist es auch für das Zustandekommen dieses Stromes gleichgültig, ob der Magnet feststeht und die Drahtschlinge in der einen Richtung, oder ob umgekehrt der Magnet in der entgegengesetzten Richtung rotirt und die Drahtschlinge ruht.

Zweifelhaft könnte dagegen sein, ob auch in dem zweiten Falle ebenso wie unstreitig im ersten die Drahtschlinge ausschliesslich den Sitz der elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{E}_b$ bildet, deren Linienintegral wir allein zu beobachten vermögen. Es kommt dies auf die Frage hinaus, ob wir, bildlich gesprochen, anzunehmen haben, dass die Kraftlinien mit dem Magneten rotiren, oder ob sie im äusseren Raume in Ruhe verharren, wenn der Magnet um seine Achse rotirt.

Nach der modernen Auffassung des Magnetismus ist der Luftraum in der Umgebung des Magneten ebensogut magnetisirt, wie dieser selbst. Der grössere Theil der gesammten Energie hat sogar seinen Sitz im Luftraume. Von vornherein könnte es daher ganz glaubhaft erscheinen, dass bei der Rotation des Magneten die Inductionslinien in der Luft ruhten und ihre Fortsetzungen im Magneten also ebenfalls in absoluter Ruhe verharrten oder relativ zum Magneten um dessen Achse rotirten. In diesem Falle würden sich die Kräfte $\mathfrak{E}_b$ auf die

Stahlmasse selbst vertheilen, so dass sie eine elektromotorische Kraft in radialer Richtung zwischen den peripherisch und den central gelegenen Theilen des Stahlkörpers hervorbrächten.

Gegen diese Auffassung spricht aber in eindringlicher Weise die folgende Erwägung. Verschieben wir den Magneten, so nimmt er seine Kraftlinien zweifellos mit sich und der Grund hierfür liegt offenbar darin, dass die Stahlmasse den Sitz der eingeprägten magnetischen Kräfte bildet, die man als die Ursachen des Kraft- und Inductionsflusses ansehen kann. Dieser Fall unterscheidet sich aber kaum von dem vorhergehenden, wo die Bewegung des Magneten in einer Rotation um seine Achse bestand. Auch hier nimmt der Sitz der eingeprägten magnetischen Kräfte an der Rotation Theil und wir *müssen daher annehmen, dass auch alle Kraft- und Inductionslinien und zwar sammt ihrer Fortsetzung im Luftraume mit rotiren.* Die Annahme nämlich, dass diese Linien zwar im Magneten rotirten, im Luftraume aber ruhten, dass die Stahloberfläche also eine Gleitfläche für diese Linienenden bildete, lässt sich mit dem thatsächlichen Bestehen der unipolaren Induction nicht vereinigen. $\mathfrak{E}_b$ wäre dann in beiden Theilen des ganzen Stromkreises überall Null, und die beobachtete Wirkung könnte dann höchstens in den Gleitstellen selbst zu Stande kommen, wogegen aber die Ausführungen in § 119 (nach Gleichung 282) sprechen.

Wir haben daher, wenn die Drahtschlinge rotirt und der Magnet ruht, die inducirte elektrische Kraft in der Drahtschlinge nach Gleichung (284) überall gleich $\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ und im Magneten gleich Null zu setzen und genau dieselbe Vertheilung der inducirten Kräfte auch dann anzunehmen, wenn der Magnet rotirt und die Drahtschlinge ruht. Die elektromotorische Kraft ist daher gleich dem Linienintegrale von $\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{B}$ über den ganzen ungeschlossenen äusseren Theil der Leitung.

Das reciproke Phänomen, nämlich die Rotation der beiden Leitungstheile relativ zu einander in Folge eines Stromes, der durch eine eingeprägte elektrische Kraft in dem ganzen Stromkreise unterhalten wird, erklärt sich leicht aus dem durch Gleichung (165) ausgesprochenen Differentialgesetze für die elektrodynamischen Kräfte. Diese ponderomotorischen Kräfte vertheilen sich zugleich auf die Stahlmasse und auf die Drahtschlinge und zwar so, dass die resultirende elektrodynamische Kraft an dem Magnete mit jener an der Drahtschlinge ein Kräftepaar bildet, das nicht nur eine Verdrehung beider gegeneinander, sondern auch eine Rotation des ganzen Systems zu bewirken sucht, wenn man die Gleitstellen unterdrückt. Dazu kommt aber nun noch die ponderomotorische Einwirkung des von dem Strome herrührenden magnetischen Feldes auf den Magneten, die mit dem besprochenen Kräftepaare am ganzen Systeme im Gleichgewichte steht, wie aus der Untersuchung in § 98 hervorgeht. Beide Theile des Systems suchen sich daher nur noch gegeneinander zu verdrehen.

Zweites Capitel.

Energiebeziehungen zwischen bewegten Leitern.

§ 122. Die ponderomotorische Arbeit an einem bewegten Leiter.

Ein linearer Leiter erfahre in einem magnetischen Felde eine Verschiebung $d\mathfrak{w}$. Wir wollen zunächst die Arbeit berechnen, die von der an einem Längenelemente $d\mathfrak{s}$ angreifenden elektrodynamischen Kraft bei dieser Verschiebung geleistet wird. Diese Kraft selbst ist nach Gleichung (164), wenn die Stromstärke jetzt wieder mit C bezeichnet wird,

$$\mathfrak{F} = C V d\mathfrak{s}\mathfrak{B}.$$

Nach § 6 ist die von $\mathfrak{F}$ bei der unendlich kleinen Verschiebung $d\mathfrak{w}$ geleistete Arbeit gleich

$$C d\mathfrak{w} V d\mathfrak{s}\mathfrak{B}.$$

Nach Gleichung (21) kann dafür auch

$$C\mathfrak{B} V d\mathfrak{w} d\mathfrak{s}$$

gesetzt werden. Dieser Ausdruck lässt aber eine einfache geometrische Deutung zu. Nach der Definition des Vectorproducts ist nämlich der Tensor von $V d\mathfrak{w} d\mathfrak{s}$ gleich der Fläche des Parallelogramms, das von $d\mathfrak{s}$ bei der Verschiebung $d\mathfrak{w}$ beschrieben wird; für $V d\mathfrak{w} d\mathfrak{s}$ kann daher auch $\mathfrak{N} df$ gesetzt werden, wenn die Parallelogrammfläche mit df und die nach § 7 bestimmte Einheitsnormale mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet wird. $\mathfrak{B}\mathfrak{N} df$ ist hiernach die magnetische Induction durch die vom Stromelemente $d\mathfrak{s}$ beschriebene Fläche. Der Werth ist positiv, wenn die Aufeinanderfolge der Richtungen $d\mathfrak{w}, d\mathfrak{s}, \mathfrak{B}$ zu einem Rechtssysteme im Raume führt, negativ im entgegengesetzten Falle und Null, wenn zwei der drei Richtungen mit einander zusammenfallen.

Bei der Berechnung der von der elektrodynamischen Kraft geleisteten Arbeit ist nur auf die Translationsbewegung des Elementes $d\mathfrak{s}$ zu achten; einer Drehung um den Mittelpunkt des Elementes entspricht, wie aus dem Ausdrucke für $\mathfrak{F}$ hervorgeht, die Arbeitsleistung Null, wenn $\mathfrak{B}$ constant ist und sonst eine gegen die vorige unendlich kleine Arbeitsleistung, die gegen diese stets zu vernachlässigen ist.

Für jede Verschiebung eines geschlossenen linearen Leiters im magnetischen Felde, mit der auch eine beliebige Gestaltänderung des Leiters verbunden sein kann, ist demnach die algebraische Summe der von den elektrodynamischen Kräften geleisteten Arbeiten gleich dem Producte aus der Stromstärke in dem Leiter und der durch die Bewegung für sich genommen verursachten Aenderung der Induction durch den Leiter.

Um dies in kürzester Form ausdrücken zu können, wollen wir die ganze Induction durch den Leiter mit Ω bezeichnen, d. h. Ω als den Werth des Oberflächenintegrals von $\mathfrak{B}$ über eine von dem linearen Leiter begrenzte Fläche definiren. Jener Theil von Ω, der zum Inductionsstrome selbst gehört, der also auch vorhanden wäre, wenn alle Magnete und Ströme mit Ausnahme des Inductionsstromes C aus dem Felde entfernt wären, sei mit Ω' bezeichnet. Die beiden Grössen Ω und Ω' sind Scalaren, von denen wir Ω' stets positiv rechnen und Ω dann positiv, wenn es mit Ω' gleich geht, wenn also das von fremden Erregern herrührende Feld sich zu dem von dem Strome selbst herrührenden auf der vom Strome umschlossenen Fläche addirt. Aus der Ampère'schen Schwimmerregel folgt dann sofort, dass Ω positiv ist, wenn der Umlaufssinn des Stromes C um die Fläche mit der Richtung der Induction durch die Fläche, bezw. mit der Richtung des überwiegenden Theiles, wenn die Inductionslinien an verschiedenen Stellen in entgegengesetztem Sinne durch die Fläche gehen, eine rechtsgängige Schraubenbewegung bestimmt.

Für Ω' lässt sich nach Gleichung (233) auch CL setzen, wenn L den Selbstinductionscoefficienten des bewegten Drahtringes bedeutet.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich mit diesen Bezeichnungen zu dem Ergebnisse zusammenfassen, dass die von den elektrodynamischen Kräften während einer unendlich kleinen Bewegung des Drahtringes geleisteten Arbeiten wiedergegeben werden durch

$$\text{Ponderomotorische Arbeit} = C\,(d\Omega - d\Omega') \ldots \quad (288)$$

denn der Theil $d\Omega'$ von $d\Omega$ kommt nicht durch die Bewegung zu Stande*), und nur der Rest gibt die Summe der von allen Stromelementen $d\mathfrak{s}$ durchschnittenen Inductionslinien an. Dass das Vorzeichen in Gleichung (288) richtig gewählt ist, lehrt ein Blick auf die nebenstehende Figur. Hat nämlich $\mathfrak{B}$ die eingezeichnete Richtung zu $d\mathfrak{w}$ und $d\mathfrak{s}$, so bilden $d\mathfrak{w}$, $d\mathfrak{s}$, $\mathfrak{B}$ ein Rechtssystem und die elektrodynamische Kraft leistet nach den vorher gefundenen Ergebnissen eine positive Arbeit. Die linke Seite von Gleichung (288) nimmt also einen positiven Werth an. In der That ist aber

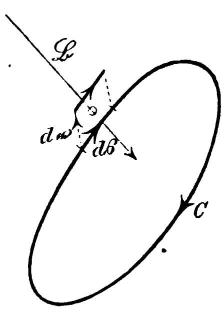


Abb. 13.

*) Vgl. indessen § 127.

auch der Zuwachs, den Ω durch die Bewegung von $d\mathfrak{s}$ erfährt, bei dieser Richtung von $\mathfrak{B}$ positiv, denn man sieht ja sofort, dass die angenommene Richtung von $\mathfrak{B}$ mit dem Umlaufssinn von C eine rechtsgängige Schraubenbewegung bestimmt.

Gleichung (288) bleibt übrigens auch dann noch gültig, wenn Gleitstellen im Leiter vorkommen, da nach den bisherigen Erfahrungen besondere ponderomotorische Kräfte an den Gleitstellen nicht auftreten und der Ausdruck für die elektrodynamische Kraft am Stromelemente nur von dem Zustande des Feldes am Orte des Stromelementes abhängt, so dass es hierfür ganz gleichgültig ist, wie sich an entfernteren Stellen die Verhältnisse gestalten.

Um die Arbeitsleistung an einem nichtlinearen Leiter zu berechnen, kann man sich die ganze Strömung in geschlossene Stromröhren zerlegt denken, die als lineare Leiter aufzufassen sind und hierauf die ganze Arbeitsleistung durch Summirung des durch Gleichung (288) gegebenen Ausdrucks über sämmtliche Stromröhren ermitteln. Verschiebungs- und Convectionsströme sind, wo sie vorkommen, hierbei natürlich mit einzurechnen.

§ 123. Vergleich der ponderomotorischen mit der elektromotorischen Arbeit.

Zunächst sei, da es von Wichtigkeit ist, genau auf das Vorzeichen der Induction Ω und ihrer Differentiale zu achten, noch auf einen Fall hingewiesen, an dem sich die Festsetzung des Vorzeichens leicht prüfen lässt. Hängt man nämlich einen linearen Leiter, in dem durch eine eingeprägte Kraft (etwa durch eine Batterie) ein Strom dauernd unterhalten wird, beweglich in einem Magnetfelde auf, z. B. so, dass er sich um eine gegebene Achse zu drehen vermag, so wird er sich von selbst stets so einstellen, dass Ω möglichst gross und positiv wird. Denn bei einem positiven $d\Omega$ leisten die elektrodynamischen Kräfte eine positive Arbeit, vermögen also äussere Widerstände, die sich der Bewegung entgegenstellen, zu überwinden. Eine Bewegung im entgegengesetzten Sinne (negatives $d\Omega$) können wir nur durch eine äussere (eingeprägte mechanische) Kraft erzwingen. Die grösste positive Inductionslinienzahl umschliesst der lineare Leiter aber dann, wenn das von dem eigenen Strome herrührende Feld Ω' mit dem vom Magneten oder fremden Strömen ausgehenden $\Omega - \Omega'$ gleichgerichtet ist. Wenn der Leiter sich selbst überlassen wird, wird er sich daher so drehen, dass diese Bedingung erfüllt wird.

Nach dem Inductionsgesetze ist das Linienintegral der inducirten Kraft gleich dem magnetischen Strome durch die umschlossene Fläche oder mit Berücksichtigung des Vorzeichens gleich $-d\Omega/dt$. Dass das Vorzeichen richtig gewählt ist, ergibt sich daraus, dass in Uebereinstimmung mit dem Lenz'schen Gesetze ein Anwachsen von Ω', mit dem Ω im gleichen Sinne gezählt wird, eine elektromotorische Kraft erzeugt, die dem Strome entgegen wirkt. Die auf die Zeiteinheit bezogene elektromotorische Arbeit der inducirten Kräfte ist gleich dem Producte aus der elektromotorischen Kraft und der Stromstärke; für die Zeit, in der die unendlich kleine Lagenänderung, die wir betrachten, erfolgt also:

$$\text{Elektrom. Arbeit der inducirten Kräfte} = -C d\Omega \qquad (289)$$

Die ponderomotorische Arbeit, die bei der unendlich kleinen Lagenänderung gewonnen wird, unterscheidet sich also von dem negativen Betrage der elektromotorischen Arbeit der inducirten Kräfte durch das Glied $-C d\Omega'$, wofür auch $-LCdC$ oder $-\frac{1}{2} L dC^2$ gesetzt werden kann, wenn sich der Selbstinductionscoefficient L während der Bewegung nicht änderte.

§ 124. Bewegung eines Drahtringes im magnetischen Felde, wenn keine eingeprägten elektrischen Kräfte auftreten.

Ein geschlossener linearer Leiter führe jetzt eine beliebige Bewegung in einem von ruhenden permanenten Magneten oder ruhenden constanten Strömen geschaffenen magnetischen Felde aus. Es wird dann ein elektrischer Strom in ihm inducirt, der selbst wieder auf das magnetische Feld zurückwirkt. Nach der soeben ausgesprochenen Voraussetzung ist aber die Aenderung des Feldes der Zeit nach ausschliesslich durch den inducirten Strom selbst bedingt.

Da ausser der inducirten keine andere elektrische Kraft an dem Drahtringe auftreten soll (auch elektrostatische Kräfte mögen der Einfachheit wegen ausgeschlossen sein, obschon sie ohnehin nichts zu der ganzen elektromotorischen Kraft beitragen können) muss das Linienintegral der inducirten Kraft in der Stromrichtung genommen nothwendig positiv sein, denn der Strom kann immer nur in der Richtung der resultirenden elektrischen Kraft zu Stande kommen. Auch die elektromotorische Arbeit ist daher in jedem Augenblicke positiv und das Differential $d\Omega$ nach Gleichung (289) demnach negativ, wenn Ω, wie stets, auf den wirklich zu Stande kommenden Strom C bezogen wird.

Der Bestandtheil $Cd\Omega$ der ponderomotorischen Arbeit (Gleichung 288) ist also hier negativ. Auch der andere Bestandtheil $-Cd\Omega'$ ist negativ, falls die Stromstärke C während der Bewegung eine Zunahme erfährt, da Ω' stets positiv ist und mit C anwächst. Im Ganzen haben wir daher in diesem Falle eine negative ponderomotorische Arbeit, d. h. wir müssen von aussen her mechanische Arbeit an dem Drahtringe leisten, um ihn zu der verlangten Orts- und Formänderung zu nöthigen. Der erste Bestandtheil dieser von aussen zugeführten Energie ist von gleichem Betrage wie die gewonnene elektromotorische Arbeit, die nach dem Joule'schen Gesetze in Wärme umgewandelt wird. Der andere Theil wird dazu gebraucht, das Anwachsen der Stromstärke zu ermöglichen.

Um dies klar einzusehen, nehme man an, der Drahtring werde nun weiterhin in seiner jetzigen Lage festgehalten. Dann ändert sich nur noch der Bestandtheil Ω' von Ω, daher ist $d\Omega = d\Omega'$ und die im folgenden Zeitelemente in Joule'sche Wärme verwandelte elektromotorische Arbeit nach Gleichung (289) gleich $-Cd\Omega'$. Der Theil Ω' nimmt also stetig ab, so lange bis der Strom allmählich erloschen ist, womit Ω' zu Null wird. Die von den äusseren Kräften geleistete Arbeit

$C d\Omega'$ ist also in der That jener Betrag von Energie, der im Medium aufgestapelt werden muss, um die Erhöhung der Stromstärke um dC im Drahtringe zu ermöglichen. Der ganze Betrag dieser aufgestapelten Energie wird in jedem Falle in irgend einer Form zurückgewonnen, wenn der Strom im Drahtringe wieder erlischt. Er geht vollständig in Joule'sche Wärme über, wenn der Drahtring festgehalten wird. In Form von mechanischer Arbeit wird er dagegen (wenigstens theilweise) zurück erhalten, wenn der Strom C während einer Bewegung des Drahtringes im magnetischen Felde abnimmt, denn in diesem Falle ist das Glied $-C d\Omega'$ in Gleichung (288) positiv.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass das Energieprincip während des ganzen Vorgangs erfüllt ist. Während wir die Bewegung einleiten, müssen wir von aussen Energie in Form von mechanischer Arbeit zuführen; ein Theil hiervon wird unmittelbar in Stromwärme verwandelt und der andere Theil wird aufgespeichert. Beim weiteren Verlaufe kann dann wiederum ein Bruchtheil der ursprünglich aufgespeicherten Energie zur Leistung äusserer Arbeit nutzbar gemacht werden, während der Rest noch vollends in Joule'sche Wärme übergeht.

Dass in der That nur ein Bruchtheil der aufgespeicherten Energie in Form von mechanischer Arbeit zurückerhalten werden kann, geht daraus hervor, dass nach Gleichung (289) $C d\Omega$ stets nothwendig negativ und dass daher die gewonnene ponderomotorische Arbeit nach Gleichung (288) stets kleiner als die bei einer Stromabnahme verfügbar werdende Energie $-C d\Omega'$ ist.

Auf die kinetische Energie der ponderablen Massen des Drahtringes während des Bewegungsvorgangs ist hierbei keine Rücksicht genommen, das Problem also so behandelt worden, als wenn der Ring keine Masse hätte, weil aus den Betrachtungen der gewöhnlichen Mechanik schon hinreichend bekannt ist, dass das Energieprincip für die hierbei ins Spiel kommenden Energieumsätze erfüllt wird.

Von einigem Interesse ist in diesem Zusammenhange schliesslich noch der Fall, dass der Widerstand des Drahtes gleich Null gesetzt werden kann. Physikalisch realisirbar ist dieser Fall zwar nicht und nach der Auffassung der Maxwell'schen Theorie von der Strombildung in den Leitern erscheint er sogar geradezu physikalisch unmöglich. Er kann daher nur die Bedeutung eines Grenzfalles in Anspruch nehmen, dem man sich bis zu einem gewissen Grade zu nähern vermag, ohne ihn jedoch völlig erreichen zu können.

In diesem Falle fällt die Joule'sche Wärme fort und daher wird auch die ihr gleiche elektromotorische Arbeit zu Null. Nach Gleichung (289) verschwindet dann das Differential $d\Omega$, d. h. die Zahl der von der Drahtschlinge umfassten Inductionslinien kann durch keine Bewegung im magnetischen Felde geändert werden. Der Strom C bildet sich nämlich während der Bewegung stets in solcher Richtung und Stärke aus, dass die resultirende Induction Ω constant bleibt. Gingen von Anfang an keine Inductionslinien durch die vom Ring umschlossene Fläche, so bleibt Ω stets gleich Null, wie man den Ring auch im magnetischen Felde bewegen möge. Die ponderomotorische Arbeit ist hier gleich $-Cd\Omega'$; sie wird vollständig wieder gewonnen, wenn der Ring in die Anfangslage zurückkehrt. Wird der Ring sich selbst überlassen, so stellt er sich so ein, dass C zu Null wird, wenn dies überhaupt in irgend einer Lage möglich ist, oder doch so, dass C den mit den Umständen verträglichen Minimalwerth annimmt. Der erste Fall tritt namentlich immer dann ein, wenn von Anfang an keine Inductionslinien vom Ringe umfasst wurden; er stellt sich dann so, dass die Kraftlinien des Feldes in die Ringebene fallen.

Man sieht leicht ein, wie sich diese Aussagen abändern, wenn der Widerstand zwar nicht als Null aber als unendlich klein angesehen werden darf. Näherungsweise trifft dies z. B. bei gewissen, in letzter Zeit oft besprochenen Wechselstromversuchen von Elihu Thomson ein.

Von rein physikalischem Interesse ist der Fall des widerstandslosen Ringes besonders desshalb, weil die schon oft berührte Ampère'sche Hypothese der Molekularströme um die

Moleküle eines Magneten eine widerstandsfreie Strombahn voraussetzt. Auf die nähere Besprechung der Nutzanwendung des Vorhergehenden auf diesen besonderen Fall braucht aber hier nicht eingegangen zu werden.

§ 125. Ruhender Drahtring im veränderlichen Felde.

Rührt die Veränderung des Feldes von Stromschwankungen in fremden Leitern her, die selbst ruhen, so liegt der schon in § 109 behandelte Fall vor. Es ergab sich dort, dass das Energieprincip in diesem Falle erfüllt wird. Hier handelt es sich daher nur noch um die durch Bewegung von permanenten Magneten (oder einem äquivalenten Stromsysteme) erzeugten inducirten Ströme. Der Einfachheit halber sei nur von einem Magneten die Rede.

Hier muss mechanische Arbeit an dem Magneten aufgewendet werden, um dessen Bewegung gegen die Wirkung der magnetischen Kräfte zu erzwingen, die von dem im Drahtringe inducirten Strome ausgehen. Sie wird theils in Form von magnetischer Energie umkehrbar im Medium aufgespeichert, theils unmittelbar in Joule'sche Wärme im Drahtringe umgewandelt.

Mit Rücksicht auf die Ausführungen über die Relativbewegung zwischen einem Magneten und einem Kreisstrome in § 115 lässt sich dieser Fall leicht auf den im vorigen § behandelten zurückführen. Es kommt dann nur noch der Unterschied in Betracht, dass die ponderomotorische Arbeit während einer unendlich kleinen relativen Lagenänderung jetzt am Magneten und nicht mehr am Kreisstrome geleistet wird. Aus der Untersuchung in § 98 ging indessen hervor, dass die ponderomotorischen Kräfte am Magneten mit denen am Kreisringe, falls beide Körper zu einem starren Systeme verbunden gedacht werden, im Gleichgewichte stehen. Die ponderomotorische Arbeit ist daher für jede relative Lagenänderung gleich gross, gleichgültig, wie sie sich im Einzelnen auf beide Körper vertheilt.

Daraus folgt, dass das Energieprincip hier ebenso wie im vorhergehenden Falle erfüllt ist.

§ 126. **Bewegung eines Drahtringes mit einer eingeprägten elektromotorischen Kraft im Magnetfelde.**

Von dem im § 124 behandelten soll sich dieser Fall nur dadurch unterscheiden, dass eine eingeprägte Kraft im Ringe auftritt, dass also etwa eine Batterie in den Stromkreis eingeschaltet ist. Wird die elektromotorische Kraft der Batterie mit E bezeichnet, so tritt zur elektromotorischen Arbeit der inducirten Kräfte in Gleichung (289) noch die elektromotorische Arbeit der Batterie hinzu, die für das Zeitelement dt gleich $CEdt$ ist. Diese ist positiv, wenn C in der Richtung von E geht. Die in Joule'sche Wärme übergehende Arbeit der resultirenden elektromotorischen Kraft ist hier

$$C(Edt - d\Omega).$$

Sie ist immer noch nothwendig positiv; es folgt aber daraus nicht mehr, dass $d\Omega$ negativ sein muss. Die ponderomotorische Arbeit wird dagegen immer noch durch den in Gleichung (288) gegebenen Werth

$$C(d\Omega - d\Omega')$$

dargestellt. Die Bilanz der Energiemengen stellt sich hier wie folgt.

Wir haben neu erhalten die Mengen:

1) die von den elektrodynamischen Kräften geleistete (nach aussen hin abgegebene) mechanische Arbeit im Betrage

$$C(d\Omega - d\Omega');$$

2) die in Form von Joule'scher Wärme im Stromkreise auftretende Energie

$$C(Edt - d\Omega);$$

3) die Erhöhung der potentiellen Energie des magnetischen Feldes (von derselben Grösse wie im Falle von § 124) um

$$Cd\Omega'.$$

Die Summe dieser neu hinzugekommenen Energiemengen ergibt genau den Betrag $CEdt$ der von der eingeprägten elektromotorischen Kraft E während des Zeitelementes dt gelieferten Energie. Wir sehen also auch hier das Energieprincip erfüllt.

Ueberlassen wir den ganzen Drahtring (oder einen Theil davon, der mit dem Reste durch Gleitstellen verbunden ist und sich in gewissen Grenzen frei zu bewegen vermag) sich selbst, so wird er sich so einstellen, dass Ω den mit den Umständen verträglichen grössten positiven Werth annimmt. Wenn diese Bewegung beginnt, sinkt die Stromstärke, die vorher von der elektromotorischen Kraft E constant im Kreise unterhalten wurde. Denn wenn auch $d\Omega'$ in dem unter 1) aufgeführten Werthe zunächst möglicherweise positiv sein könnte, so muss doch in diesem Falle, damit die Bewegung nach 1) von selbst erfolgen kann, mindestens $d\Omega$ positiv sein. Damit wird aber die resultirende elektromotorische Kraft $E - {}^{d\Omega}/_{dt}$ kleiner als E und daher nimmt auch der Strom C ab. Mit C vermindert sich aber zugleich Ω' und daher ist auf jeden Fall das Glied $- Cd\Omega'$ in 1) positiv. Da nun festgestellt ist, dass der Strom auf jeden Fall abnimmt, folgt aus dem Ausdrucke für die resultirende elektromotorische Kraft sofort weiter, dass $d\Omega$ nothwendig positiv ist. Beide Glieder in 1) tragen also zur Arbeitsleistung bei der Ueberwindung der Bewegungswiderstände bei und diese Energie wird zum Theile aus der Batterie entnommen, deren Arbeit während der Bewegung nicht ganz für die Lieferung der Joule'schen Wärme verbraucht wird und zum anderen Theile aus der magnetischen Energie des Stromes. Nachdem die neue Lage erreicht ist, wird diese, während der Strom allmählich wieder zu seiner normalen Stärke ansteigt, aus dem Ueberschusse der Arbeit der Batterie über die Joule'sche Wärme ergänzt.

§ 127.

Bei der vorhergehenden Betrachtung ist auf einen Umstand noch nicht genügend geachtet, der nun besonders betrachtet werden soll. Um ihn in ein möglichst helles Licht zu rücken, vereinfache ich das Problem in der Weise, dass die permanenten

Magnete und fremden Stromkreise ganz entfernt werden, so dass das magnetische Feld nur noch durch den Strom im Drahtringe selbst bedingt wird. Bewegungen des ganzen Ringes mit sammt der Batterie, die den Strom darin unterhält, ändern dann nichts an dem elektrischen und magnetischen Zustande. Dagegen soll jetzt ein Theil des Stromkreises beweglich und mit dem anderen feststehenden Theile des Kreises durch Gleitstellen verbunden sein. Dann treten erstens an dem beweglichen Theile und ebenso an dem festen elektrodynamische Kräfte auf, von denen jene bei der Bewegung Arbeit leisten. Zweitens wird durch diese Bewegung eine elektromotorische Kraft des Stromes auf sich selbst inducirt und drittens ändert sich — was das eigentlich Characteristische des Falles ist — Ω' gleichfalls schon durch die Bewegung des einen Theiles, wenn auch selbst die Stromstärke dabei unverändert erhalten würde.

Mit dem abstracten Begriffe des linearen Stromes wird man bei der Behandlung dieser Aufgabe nicht fertig und zwar desshalb nicht, weil die specifische Stromstärke $\mathfrak{i}$ des endlichen Stromes C hierbei unendlich gross wird, so dass auch der curl von $\mathfrak{B}$ einen unendlich grossen Werth annimmt und das magnetische Feld daher bei der Strombahn eine Stetigkeitsunterbrechung erfährt. Die Berechnung der elektrodynamischen Kraft $\mathfrak{F}$ an einem Stromelement nach Gleichung (164) begegnet daher der Schwierigkeit, dass man sich in Unsicherheit befindet, welcher Werth für $\mathfrak{B}$ einzusetzen ist. Rührt das Feld von fremden Strömen her, so kann man sich über diese Schwierigkeit leicht hinweghelfen, indem man den Strom C als unendlich klein ansieht, wie dies ja auch für die einzelnen Stromfäden, in die man einen durchströmten körperlichen Leiter zerlegen kann, unbedingt zutrifft. Anders ist es aber, wenn der lineare Leiter allein vorhanden ist, denn für einen unendlich kleinen Strom C wäre auch überall $\mathfrak{B}$ unendlich klein und die Stetigkeitsunterbrechung in der Umgebung der Strombahn bliebe nach wie vor bestehen.

In solchen Fällen ist daher von vornherein darauf zu achten, dass in Wirklichkeit ein Zusammendrängen der elektrischen Strömung auf eine lineare Strombahn überhaupt unmöglich ist. Man weiss dann, dass $\mathfrak{B}$ sich auch im Innern des Leiters continuirlich ändert und man kann die elektrodynamische Kraft an einem einzelnen Stromfaden leicht aus der Formel (164) berechnen. Für ein gegebenes Längenelement des Leiters erhält man die elektrodynamische Kraft alsdann als die Resultirende dieser Kräfte an den einzelnen Stromfäden.

Auch für die Ermittelung der ponderomotorischen Arbeit kann man nun sofort die Entwickelungen in § 122 benutzen. In Gleichung (288) ist jedoch zu beachten, dass $d\Omega - d\Omega'$ in der That nur jene Aenderung von Ω ausdrücken sollte, die durch einen Uebertritt vorhandener Inductionslinien in die vom linearen Leiter umschlossene Fläche bei der Bewegung bewirkt wird. Spalten wir daher von $d\Omega'$ jetzt einen Theil $d\Omega''$ ab, der mit dem Uebertritte von Inductionslinien des eigenen Feldes in die vom Strome umschlossene Fläche (worauf der Rest von $d\Omega'$ zurückzuführen ist) nichts zu schaffen hat, so tritt hier an die Stelle von Gleichung (288)

$$\text{Ponderom. Arbeit} = C(d\Omega' - d\Omega'')$$

und an Stelle von Gleichung (289) ebenso

$$\text{Elektrom. Arbeit der inducirten Kräfte} = -\,C d\Omega'.$$

Alle vorausgegangenen Betrachtungen bleiben daher auch für den jetzt behandelten Fall anwendbar, wenn man dort überall $d\Omega$ durch $d\Omega'$ und $d\Omega'$ durch $d\Omega''$ ersetzt. Der physikalische Sinn dieses Wechsels in der Bezeichnungsweise ist leicht zu erklären. Er läuft darauf hinaus, dass, wenn wir genöthigt werden, uns auf die Betrachtung eines einzigen Stromfadens in einem körperlichen Leiter zu beschränken, alle übrigen Stromfäden als fremde zu betrachten sind, so dass die von ihnen ausgehenden Inductionslinien nicht mehr in Ω' mit einzurechnen sind.

Diese Betrachtungen bleiben selbstverständlich auch dann noch gültig, wenn das magnetische Feld nicht ausschliesslich vom Strome C selbst hervorgerufen wird, wenn also z. B. daneben noch Magnete vorkommen. Man muss dann nur überall, wenn Formänderungen des Ringes vorkommen, an die Stelle von $d\Omega'$ in den Formeln der vorhergehenden Paragraphen jenen Werth setzen, der hier als $d\Omega''$ definirt ist. Der Rest des ursprünglichen $d\Omega'$ führt ebenfalls zu mechanischen Arbeitsleistungen, so dass in Gleichung (288) von $d\Omega$ nur noch $d\Omega''$ zu subtrahiren ist.

§ 128. Zwei lineare Leiter mit eingeprägten Kräften.

Das magnetische Feld rühre jetzt nur von den beiden Drahtringen selbst her und diese mögen sich in einem Medium von constanter Permeabilität μ_0 in beliebiger Weise bewegen, wobei sie auch ihre Gestalt ändern können. Fassen wir einen der beiden Ringe ins Auge, so unterscheidet sich der jetzt vorliegende Fall von dem in § 126 besprochenen dadurch für diesen Ring, dass das ihm zugehörige Ω nun auch noch von der Bewegung des zweiten Ringes und der Aenderung der Stromstärke in ihm abhängt.

Jener Theil der Induction Ω_1 durch den ersten Leiter, der von dem zweiten Leiter herrührt, verhält sich übrigens zu dem entsprechenden Bestandtheile von Ω_2 umgekehrt wie die beiden Stromstärken. Wir werden dies leicht erkennen, wenn wir die Werthe der Ω mit Hülfe der Inductionscoefficienten $L_1 L_2$ und M ausdrücken. Nach Gleichung (258) sind nämlich die Coefficienten $M_{1,2}$ und $M_{2,1}$ von gleicher Grösse; für ihren gemeinsamen Werth schreiben wir einfach M. Für Ω_1 erhalten wir

$$\Omega_1 = \int \mathfrak{B}\mathfrak{N}\,df_1 = \mu_0 \int \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s}_1 = \mu_0 \int \mathfrak{A}_1\,d\mathfrak{s}_1 + \mu_0 \int \mathfrak{A}_2\,d\mathfrak{s}_1$$

$$= \mu_0 C_1 \int \frac{d\mathfrak{s}_1\,d\mathfrak{s}_1}{r} + \mu_0 C_2 \int \frac{d\mathfrak{s}_1\,d\mathfrak{s}_2}{r} = C_1 L_1 + C_2 M.$$

Bei diesen Umformungen sind die Formeln (231), (276), (234) und (258) verwendet; ebenso ist

$$\Omega_2 = C_2 L_2 + C_1 M.$$

Für das Differential von Ω_1, das für die im ersten Stromkreise geleistete elektromotorische Arbeit der inducirten Kräfte nach Gleichung (289) maassgebend ist, erhalten wir hier

$$d\Omega_1 = C_1 dL_1 + L_1 dC_1 + C_2 dM + M dC_2.$$

Es fragt sich jetzt, welchen Theil hiervon wir in Gleichung (288) zur Berechnung der ponderomotorischen Arbeit einzuführen haben. Es ist nur jener Theil, der ausschliesslich in Folge der Bewegung des Stromringes durch das Feld in die umschlossenene Fläche eintritt. Sicher können daher die Glieder $L_1 dC_1$ und $M dC_2$ nichts dazu beitragen, da sie gar keine Beziehung auf eine Lagenänderung enthalten. Nach den vorhergehenden Bemerkungen ist aber auch in Bezug auf die beiden anderen Glieder Vorsicht geboten und wir wollen daher zunächst einmal annehmen, dass nur der erste Stromring eine Bewegung ohne Formänderung ausführe, während die beiden Stromstärken (durch passende Verfügung über den Werth der eingeprägten Kräfte) constant erhalten werden. Dann ist $d\Omega_1 = C_2 dM$ und dieser Zuwachs von Ω_1 ist sicher ausschliesslich durch die Bewegung des ersten Ringes im Felde allein bewirkt, so nämlich, dass er die algebraische Summe der von den einzelnen Stromelementen durchkreuzten und hierdurch in die vom Ring umschlossene Fläche neu eintretenden Inductionslinien angibt; die austretenden sind dabei negativ einzurechnen. Hier wissen wir also nach den Untersuchungen in § 122 genau, dass $C_1 d\Omega_1$ oder $C_1 C_2 dM$ die von den elektrodynamischen Kräften am ersten Ringe geleistete ponderomotorische Arbeit ist. Zugleich hat sich aber auch Ω_2 währenddessen um $C_1 dM$ erhöht und dieser Erhöhung steht keine Arbeitsleistung gegenüber, da der zweite Ring in Ruhe blieb. Wir würden daher einen Fehler begehen, wenn wir diesem $d\Omega_2$ ebenfalls eine Arbeitsleistung von dem Betrage $C_2 d\Omega_2$ anrechnen wollten, wie wir es hätten thun müssen, wenn die relative Lagenänderung beider Ringe zu einander durch eine Bewegung des zweiten Ringes veranlasst worden wäre, während deren der erste Ring in Ruhe geblieben wäre.

Die Arbeitsleistung im letzten Falle $C_2 d\Omega_2$ ist übrigens ebenfalls gleich $C_1 C_2 dM$, wie aus dem Werthe von Ω_2 hervorgeht und wir sind daher nebenher zu dem Resultate geführt worden, dass das Gesetz der Action und Reaction zwischen zwei Stromringen im Ganzen ebenso erfüllt ist, wie dies durch eine besondere Betrachtung schon früher für die Kräfte zwischen einem Magneten und einem Kreisstrome nachgewiesen wurde.

Ertheilen wir nun beiden Stromringen eine Bewegung, während deren sie ihre Form nicht ändern und während deren auch die Stromstärken constant erhalten werden, so wird an jedem eine ponderomotorische Arbeit geleistet. Wir dürfen aber für die Summe beider Arbeitsleistungen jetzt nicht einfach $C_1 d\Omega_1 + C_2 d\Omega_2$ oder $2C_1 C_2 dM$ setzen, denn hierbei würde, wie aus der vorhergehenden Betrachtung folgt, jede Arbeitsleistung doppelt gerechnet. Der ganze Betrag der geleisteten Arbeit ist daher nur gleich der Hälfte dieses Werthes oder gleich $C_1 C_2 dM$.

Jetzt vermögen wir uns auch leicht Rechenschaft darüber zu geben, wie gross wir die Arbeitsleistung bei der Formänderung eines Ringes (z. B. bei der Verschiebung eines in ihn eingeschalteten Gleitstückes) zu setzen haben. Denn aus der Untersuchung des vorhergehenden Paragraphen folgt, dass wir den Leiter in einzelne Stromfäden auflösen müssen, um zu berechnen, wie viele Kraftlinien des eigenen Feldes bei der Formänderung von einem Stromfaden durchschnitten werden. Die anderen Stromfäden des Leiters stehen dem gerade betrachteten dann genau so gegenüber wie bei der vorigen Untersuchung der erste und der zweite Leiter. Wir finden also gerade wie vorher die geleistete Arbeit ihrem doppelten Betrage nach, wenn wir nur einfach den Ausdruck $Cd\Omega$ für den seine Form ändernden Leiter bilden. Betrachten wir also einen Vorgang, während dessen nur der erste Leiter seine Gestalt ändert, während sonst alles unverändert bleibt, so ist die von den elektrodynamischen Kräften geleistete Arbeit gleich

$$\tfrac{1}{2} C_1 d\Omega_1 \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2} C_1^2 dL_1,$$

oder, wenn wir auch auf die Aenderung von M Rücksicht nehmen, die durch die Gestaltänderung herbeigeführt wird, gleich

$$\tfrac{1}{2}C_1^2 dL_1 + C_1 C_2 dM$$

zu setzen.

Nach diesen Betrachtungen sind wir nun in den Stand gesetzt, die Arbeitsleistung der elektrodynamischen Kräfte an beiden Kreisen für eine beliebige Lagen- und Formänderung anzugeben; sie ist gleich

$$\tfrac{1}{2}C_1^2 dL_1 + \tfrac{1}{2}C_2^2 dL_2 + C_1 C_2 dM.$$

Ferner ist nach dem Inductionsgesetze die im ersten Ringe inducirte elektromotorische Kraft gleich $-d\Omega_1/dt$, wozu noch die eingeprägte elektromotorische Kraft E_1 kommt. Für beide Ringe zusammen ist also die in Joule'sche Wärme verwandelte elektromotorische Arbeit während des betrachteten Zeitelementes dt gleich

$$C_1(E_1 dt - d\Omega_1) + C_2(E_2 dt - d\Omega_2)$$

oder gleich

$$\begin{aligned} E_1 C_1 dt + E_2 C_2 dt - C_1^2 dL_1 - C_2^2 dL_2 - C_1 L_1 dC_1 - C_2 L_2 dC_2 \\ - 2C_1 C_2 dM - M(C_1 dC_2 + C_2 dC_1) \end{aligned}$$

zu setzen. — Mit der Lagenänderung und der Aenderung der Stromstärken in beiden Kreisen ist aber zugleich eine Erhöhung dT der potentiellen Energie T des magnetischen Feldes verbunden, die sich nach Gleichung (259) zu

$$\begin{aligned} dT = C_1 L_1 dC_1 + C_2 L_2 dC_2 + \tfrac{1}{2}C_1^2 dL_1 + \tfrac{1}{2}C_2^2 dL_2 \\ + M(C_1 dC_2 + C_2 dC_1) + C_1 C_2 dM \end{aligned}$$

ergibt.

Die Summe dieser drei neu auftretenden Energiemengen gibt demnach

$$C_1 E_1 dt + C_2 E_2 dt$$

d. h. genau jenen Betrag, der während derselben Zeit aus den beiden Batterien entnommen ist. Damit ist der Nachweis geführt, dass das Energieprincip auch in diesem Falle erfüllt ist.

Von besonderem Interesse ist noch die weitere Verfolgung des Specialfalles, von dem vorher schon die Rede war, dass nämlich die Stromstärken in den beiden Kreisen (durch entsprechende Verfügung über die Werthe der eingeprägten elektromotorischen Kräfte E_1 und E_2) constant erhalten werden. Bei jeder Lagenänderung der beiden Kreise, die von selbst eintritt, oder bei der wir mechanische Arbeit gewinnen, erhöht sich dann zugleich die magnetische Energie des Feldes um denselben Betrag, denn der Ausdruck für dT wird dem für die ponderomotorische Arbeit genau gleich, wenn dC_1 und dC_2 Null sind.

Dieser Zusammenhang hat schon zu manchen Irrthümern und Verwirrungen Veranlassung gegeben. Denkt man sich nämlich die Stromringe durch magnetische Schalen ersetzt, so liegt die Vermuthung nahe genug, dass die mechanische Arbeit bei der Bewegung auf Kosten der potentiellen Energie des magnetischen Feldes gewonnen werden müsse. Nun sind aber, wie sich zeigte, beide Energiemengen, nämlich dT und die gewonnene Arbeit zwar von gleichem Betrage, aber nicht, wie man auf Grund dieser Vorstellung vermuthen sollte, von entgegengesetztem, sondern von gleichem Vorzeichen. Die potentielle Energie wächst während wir dem Systeme Arbeit entnehmen. Auf den ersten Blick scheint dies in der That dem Energieprincip zu widersprechen; der Widerspruch klärt sich aber sofort auf, wenn wir darauf achten, dass zugleich von der Batterie um so viel mehr elektromotorische Arbeit über die zur Lieferung der Joule'schen Wärme hinaus erforderliche geliefert wird, um jene beiden Beträge zu decken.

Um einen vollständigeren Einblick in diese Beziehungen zu gewinnen, betrachte man noch zwei widerstandslose Bahnkreise, ähnlich, wie dies schon in § 124 geschehen war. Die eingeprägten Kräfte haben wir dann gleich Null zu setzen. War die Induction durch die beiden Ringe von Anfang an gleich Ω_1 bezw. Ω_2, so behält sie nach § 124 diesen Werth stets bei; die Stromstärken ändern sich in jedem Kreise so, dass diese Bedingung stets erfüllt bleibt. Die Joule'sche Wärme wird zu Null und wir erhalten, wenn wir den für sie vorher aufgestellten Werth gleich Null setzen,

$$C_1 L_1 dC_1 + C_2 L_2 dC_2 + M(C_1 dC_2 + C_2 dC_1)$$
$$= -(C_1^2 dL_1 + C_2^2 dL_2 + 2C_1 C_2 dM).$$

Führen wir dies in den Ausdruck für dT ein, so geht er über in

$$dT = -\tfrac{1}{2} C_1^2 dL_1 - \tfrac{1}{2} C_2^2 dL_2 - C_1 C_2 dM.$$

Für das in dieser Weise geordnete System gilt also in der That die vorher für das andere gehegte Vermuthung, dass nämlich die Aenderung der potentiellen Energie der gewonnenen mechanischen Arbeit entgegengesetzt gleich ist, so dass also die Arbeit dem aufgespeicherten Energievorrathe entnommen wird. Die beiden Ringe suchen sich jetzt im Gegensatze zu dem vorigen Falle, wo die Stromstärken constant erhalten wurden, so zu einander zu stellen, dass die potentielle Energie zu einem Minimum wird.

Freilich ist die Bewegung, die sie hierbei ausführen müssen, genau dieselbe wie im vorigen Falle, wo mit dieser Bewegung ein Anwachsen der potentiellen Energie verbunden war.

Für die Ampère'schen Molekularmagnete wäre dies der Gang der Sache; zu beachten ist indessen, dass während der Lagenänderung zwar die Zahl der durch jeden Ring gehenden Inductionslinien constant bleibt, aber keineswegs die Stärke der äquivalenten magnetischen Schale oder das magnetische Moment des Moleküls.

Auch diese Bemerkungen zeigen von Neuem, wie wenig es durchführbar ist, die magnetischen Erscheinungen durch Molekularströme physikalisch vollständig zu erklären.

In genau derselben Weise lassen sich, wie schliesslich noch bemerkt werden mag, die vorhergehenden Untersuchungen auf ein Feld, in dem drei oder auch beliebig viele Stromringe vorkommen, übertragen. Es würde indessen hier fast auf eine Papierverschwendung hinaus kommen, wenn ich die Betrachtung in dieser allgemeineren Form nochmals wiederholen wollte.

Drittes Capitel.

Die Elektrodynamik der magnetischen Ströme.

§ 129. Das Vectorpotential magnetischer Ströme.

Nach dem Heaviside'schen Princip der Dualität zwischen den elektrischen und den magnetischen Erscheinungen müssen wir erwarten, dass sich zu den wohlbekannten Phänomenen, deren Besprechung den Inhalt dieses und des vorhergehenden Abschnittes ausmachte, reciproke Phänomene angeben lassen, die sich der Beobachtung bisher nur deshalb entzogen haben, weil die mit ihnen verbundenen Wirkungen zu gering sind. Der elektrodynamischen Kraft zwischen zwei elektrischen Strömen entspricht die schon in § 74 besprochene „magnetodynamische" Kraft zwischen magnetischen Strömen; aber auch den durch Bewegung im magnetischen Felde oder durch Veränderung dieses Feldes inducirten elektrischen Kräften sind magnetische Kräfte gegenüber zu stellen, die durch Bewegungen in einem elektrostatischen Felde oder durch Veränderung des elektrostatischen Feldes inducirt werden. Auch hier sind die von der Theorie vorausgesagten Kräfte nur gering; besonders sind aber die Wirkungen, die von diesen inducirten Kräften hervorgebracht werden können, deshalb so geringfügig gegenüber jenen der inducirten elektrischen Kräfte, weil es uns an magnetischen Leitern fehlt, aus denen wir einen Multiplicator aufwickeln könnten, an dessen Polen das ganze Linienintegral der inducirten Kräfte ebenso concentrirt werden könnte, wie bei einer gewöhnlichen Inductionsspule.

Man verfährt am einfachsten, wenn man bei allen diesen Betrachtungen unmittelbar auf die Erörterung der thatsächlich beobachteten reciproken Phänomene zurückverweist und zu diesem Zwecke von vornherein einen möglichst engen Anschluss an diese herbeiführt. Dazu gehört, dass auch zu dem Vectorpotentiale $\mathfrak{A}$ der elektrischen Ströme das Analogon, also das Vectorpotential der magnetischen Ströme $\mathfrak{g}$, eingeführt wird.

Zu diesem Zwecke gehe ich aus von der Betrachtung eines elektrischen Feldes. Ist dieses rein elektrostatisch, so ist $\mathfrak{E}$ wirbellos vertheilt. Ein fortdauernd constantes elektrisches Feld $\mathfrak{E}$ ist immer rein elektrostatisch, da unbegrenzte Zeit hindurch andauernde magnetische Ströme nicht möglich sind, indem es uns dazu an magnetischen Leitern fehlt. Für kürzere Zeiten lässt sich aber auch ein constantes elektrisches Feld realisiren, das nicht mehr rein elektrostatisch, in dem also $\mathfrak{E}$ nicht mehr wirbelfrei vertheilt ist. In diesem Falle setze ich für einen in absoluter Ruhe befindlichen Raum

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_m + \mathfrak{E}_s,$$

wo $\mathfrak{E}_s$ wie früher die elektrostatische, $\mathfrak{E}_m$ die von magnetischen Strömen erzeugte elektrische Kraft ist, während eingeprägte Kräfte nicht vorkommen sollen. Hiernach ist

$$\text{curl}\, \mathfrak{E}_s = 0; \quad \text{div}\, \mathfrak{E}_m = 0.$$

Der solenoidale Bestandtheil $\mathfrak{E}_m$ von $\mathfrak{E}$ kann nun als curl eines Vectors angesehen werden, der mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnet werden mag. Ich setze also

$$\mathfrak{E}_m = \text{curl}\, \mathfrak{Z}; \quad \mathfrak{E} = \text{curl}\, \mathfrak{Z} + \mathfrak{E}_s \quad . \quad . \quad . \quad (290)$$

Von der letzten Gleichung nehme ich den curl; $\mathfrak{E}_s$ hebt sich dann aus ihr fort und wir erhalten

$$\text{curl}^2\, \mathfrak{Z} = \text{curl}\, \mathfrak{E}.$$

Hiermit verbinde ich die zweite Hauptgleichung des elektromagnetischen Feldes, die hier, wo keine eingeprägten Kräfte vorkommen sollten,

$$\text{curl}\, \mathfrak{E} = -\mathfrak{g}$$

geschrieben werden kann, so dass die vorhergehende Gleichung übergeht in

$$\text{curl}^2\, \mathfrak{Z} = -\mathfrak{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (291)$$

Vom Vector $\mathfrak{Z}$ war bisher nur verlangt, dass sein curl die elektrische Kraft $\mathfrak{E}_m$ liefere; wir können ihm daher nachträglich einen beliebigen wirbelfrei vertheilten Vector $\mathfrak{R}$ hinzufügen, ohne an der Gültigkeit der vorhergehenden Gleichungen dadurch etwas zu ändern. Diese Unbestimmtheit in dem Werthe von $\mathfrak{Z}$ sei aber von nun ab dadurch aufgehoben, dass wir $\mathfrak{R}$ so bestimmen, dass $\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}$ die div Null hat. Weiterhin mag dann der in dieser Weise näher bestimmte Vector $\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}$ für $\mathfrak{Z}$ eingeführt werden. Wir haben dann

$$\operatorname{div} \mathfrak{Z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (292)$$

Mit Rücksicht auf Gleichung (72), S. 59 und auf die soeben getroffene Aenderung in der Definition von $\mathfrak{Z}$ geht aber dann Gleichung (291) über in

$$\nabla^2 \mathfrak{Z} = \mathfrak{g} \quad \text{oder} \quad \nabla^2 (-4\pi \mathfrak{Z}) = -4\pi \mathfrak{g}$$

und diese sagt aus, dass $-4\pi\mathfrak{Z}$ ein zu $\mathfrak{g}$ gehöriges Vectorpotential ist (§ 84). Wir erhalten daher für $\mathfrak{Z}$ den Ausdruck

$$\mathfrak{Z} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{g}}{r}\, dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (293)$$

Das über das ganze Feld erstreckte Raumintegral ist nach der Definition in § 83 als Vectorpotential des magnetischen Stromes $\mathfrak{g}$ zu bezeichnen.

Für $\mathfrak{D}_m$ erhalten wir nach Gl. (290) und Gl. (115)

$$\mathfrak{D}_m = \frac{K}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{Z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (294)$$

§ 130. Die elektrostatische Energie im Felde magnetischer Ströme aufgefasst als „magnetokinetische“ Energie.

Nach dem Inductionsgesetze bringt ein magnetischer Strom ein elektrisches Feld (das Feld der Kräfte $\mathfrak{E}_m$) hervor. Diesen Kräften $\mathfrak{E}_m$ entsprechen einerseits Verschiebungen $\mathfrak{D}_m$ und andererseits Energieanhäufungen, die nach Gleichung (116) zu berechnen sind. Wir nannten diese Energie früher die elektrostatische; eigentlich trifft diese Bezeichnung hier nicht mehr zu, da die Kräfte $\mathfrak{E}_m$ nicht mehr wirbelfrei vertheilt sind und daher nicht zu einem Potentiale gehören. Von dem verschiedenen Ursprunge abgesehen, sind die Kräfte $\mathfrak{E}_m$ den elektrostatischen Kräften $\mathfrak{E}_s$ aber physikalisch völlig gleichwerthig und wir können daher nicht nur die frühere Formel zur Berechnung der Energie hier unverändert verwenden, sondern man kann auch die Bezeichnung beibehalten, wenn man nicht, um jedes Missverständniss auszuschliessen, vorzieht, hier elektrische Energie dafür zu setzen.

Ich nehme jetzt an, dass $\mathfrak{E}_s$ im Felde überall Null sei, dass das elektrische Feld also ausschliesslich durch die magnetischen Ströme hervorgerufen sei. Im Allgemeinen setzt dies voraus, dass keine elektrischen Leiter im Felde vorkommen, weil sich im anderen Falle alsbald ein elektrostatisches Feld durch die sich auf dem Leiter ansammelnden wahren und freien Elektricitätsmengen herausbilden würde. Ebenso soll die Dielektricitätsconstante K im ganzen Felde constant sein.

Die elektrostatische (oder elektrische) Energie im ganzen Felde berechnet sich nach Gleichung (116) zu

$$T = \tfrac{1}{2}\int \mathfrak{E}\mathfrak{D}\,dv\,.$$

Hierauf wollen wir dieselbe Umformung anwenden, wie in § 104 auf den durch Gleichung (236) gegebenen Ausdruck für die magnetische Energie eines elektrischen Stromes. Man hat nach Gleichung (294) und Gleichung (81)

$$\mathfrak{E}\mathfrak{D} = \mathfrak{E}\,\frac{K}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{Z} = \frac{K}{4\pi}\left(\mathfrak{Z}\operatorname{curl}\mathfrak{E} + \operatorname{div} V\mathfrak{Z}\mathfrak{E}\right).$$

Bei der Integration über den ganzen Raum verschwindet, wie in § 104, das letzte Glied und man erhält

$$T = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{K}{4\pi}\int \mathfrak{Z}\operatorname{curl}\mathfrak{E}\,dv$$

oder mit Berücksichtigung der zweiten Hauptgleichung

$$T = -\frac{K}{8\pi}\int \mathfrak{Z}\mathfrak{z}\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (295)$$

Diese Gleichung ist in jeder Hinsicht der Gleichung (238) für die magnetische Energie im Felde eines elektrischen

Stromes analog. Die Symmetrie der Formeln wird nur wieder wegen der unglücklichen Wahl des herrschenden Maasssystems durch den Factor 4π gestört. Das Linienintegral von $\mathfrak{Z}$ über die Mittellinie eines in sich geschlossenen magnetischen Stromfadens entspricht dem Inductionscoefficienten des ganzen Systems auf diesen Stromfaden. Hat man z. B. zwei magnetische Kreisströme (die von Hertz behandelten „verschwindenden Ringmagnete"), so lässt sich die elektrische Energie des von ihnen geschaffenen Feldes sofort nach Gleichung (259) berechnen, falls man unter den C jetzt die magnetischen Stromstärken versteht und in der Definition der Inductionscoefficienten L und M in Gleichung (234) und Gleichung (258) die Permeabilität μ_0 durch $K/(4\pi)^2$ ersetzt.

Maxwell führte für die magnetische Energie im Felde eines elektrischen Stromes die Bezeichnung elektrokinetische Energie ein (vgl. § 133). Um die Analogie zwischen dieser und der hier betrachteten elektrischen Energie magnetischer Ströme möglichst deutlich hervorzuheben, kann man dieser die analog gebildete Bezeichnung „magnetokinetische" Energie beilegen.

In der That handelt es sich hier übrigens, wenn die Maxwell'sche Theorie richtig ist, wenn also die Richtigkeit der beiden Hauptgleichungen und der Formeln für die Energie im elektrischen und magnetischen Felde zugegeben wird, nicht nur um eine Analogie, die wohl im Allgemeinen zutrifft, im Einzelnen aber Abweichungen zulässt, sondern um die strengste Uebereinstimmung der Beziehungen im Sinne des Heaviside'schen Dualitätsprincips. Auf diese Betonung ist um so mehr Gewicht zu legen, als alle Schlüsse, die wir auf Grund der Energiebeziehungen, im Besonderen auch auf Grund der Lagrange'schen Gleichung für die Erscheinungsgruppen der elektrischen Seite ableiten können, sofort auch auf die magnetische Seite anwendbar sind.

Wer daher z. B. in der Ableitung der inducirten elektrischen Kraft aus der Lagrange'schen Gleichung den untrüglichen Nachweis für die Richtigkeit des gewonnenen Resultats erblickt, kann mit demselben Rechte diese Gleichung auch zur Herleitung der durch Veränderungen eines elektrostatischen Feldes inducirten magnetischen Kraft benutzen. Dieser Zusammenhang gestattet uns hier eine kürzere Fassung; wir können z. B. zur Rechtfertigung der Annahme magnetodynamischer Kräfte einfach darauf verweisen, dass sie aus denselben Gründen, wie die elektrodynamischen Kräfte auftreten müssen, um das Energieprincip zwischen zwei auf einander wirkenden magnetischen Strömen zu erfüllen.

§ 131. Inducirte magnetische Kraft infolge von Aenderungen eines elektrischen Feldes ohne Bewegung.

Hier schliesse ich mich eng an die analoge Betrachtung in § 101 an. Die erste Hauptgleichung lautet, da keine eingeprägten Kräfte und auch keine Leitungs- oder Convectionsströme vorkommen,

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = K \frac{d\mathfrak{E}}{dt}.$$

Nach Einsetzen von $\mathfrak{E}$ aus Gleichung (290) und mit $\mathfrak{E}_s = 0$ geht dies über in

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = K \operatorname{curl} \frac{d\mathfrak{Z}}{dt}$$

oder, nach Integration,

$$\mathfrak{H} = K \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} + \mathfrak{K}.$$

Der curl der Integrationsconstanten $\mathfrak{K}$ ist Null und ebenso seine Divergenz, da auch $\operatorname{div} \mathfrak{H} = \operatorname{div} \mathfrak{Z} = 0$ ist. Da dies im ganzen Felde gilt, ist $\mathfrak{K}$ selbst Null. Wir haben also

$$\mathfrak{H} = K \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} \quad \text{. . . . .} \quad (296)$$

für die inducirte magnetische Kraft in dem hier bezeichneten Falle.

Dass ein sich änderndes elektrisches Feld überhaupt magnetische Kräfte induciren muss, lässt sich übrigens schon aus den elementarsten Grundlagen der Theorie schliessen, denn mit jeder Aenderung der Feldstärke sind Verschiebungsströme verbunden, die ihrerseits ein magnetisches Feld hervorrufen. Nur für die Ableitung des zahlenmässigen Werthes dieser Kräfte ist die Betrachtung erforderlich.

§ 132. **Durch Bewegungen im elektrostatischen Felde inducirte magnetische Kraft.**

Für die Ermittelung dieser Kraft bildet § 117 das Muster. Wie dort setze man

$$\dot{\mathfrak{E}} = -(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{E} + V\mathfrak{u}\mathfrak{E} = \operatorname{curl}\left(-(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{Z} + V\mathfrak{u}\mathfrak{Z}\right),$$

womit die erste Hauptgleichung übergeht in

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = K\operatorname{curl}\left\{-(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{Z} + V\mathfrak{u}\mathfrak{Z}\right\},$$

$$\mathfrak{H} = K\left\{-(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{Z} + V\mathfrak{u}\mathfrak{Z}\right\} + \mathfrak{K}$$

oder mit Rücksicht auf den durch Gleichung (274) ausgesprochenen Satz

$$\begin{aligned}\mathfrak{H} &= -KV\operatorname{curl}\mathfrak{Z}\mathfrak{v} - K\nabla\mathfrak{Z}\mathfrak{v} + \mathfrak{K}\\ &= -KV\mathfrak{E}\mathfrak{v} - K\nabla\mathfrak{Z}\mathfrak{v} + \mathfrak{K} \quad \ldots \quad (297)\end{aligned}$$

Der als Integrationsconstante auftretende Vector $\mathfrak{K}$ muss wirbelfrei vertheilt sein, ohne zunächst eine weitere Bedingung erfüllen zu müssen. Die genauere Bestimmung macht hier dieselben Schwierigkeiten, wie bei der Berechnung von $\mathfrak{E}_\mathfrak{v}$. Folgt man den Erwägungen, die zu Gleichung (284) führten, so ist

$$\mathfrak{H} = -KV\mathfrak{E}\mathfrak{v} = 4\pi V\mathfrak{v}\mathfrak{D} \quad \ldots \quad (298)$$

bezw. mit entgegengesetztem Vorzeichen, wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ sich auf den Körper bezieht, für den wir $\mathfrak{H}$ berechnen wollen (vgl. § 119). Es mag indessen sein, dass $\mathfrak{H}$ auch in diesem Falle solenoidal vertheilt ist und in diesem Falle hätten wir $\mathfrak{K}$ in Gleichung (297) gleich Null zu setzen, so dass ähnlich wie in Gleichung (296)

$$\mathfrak{H} = K\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} = K\left\{-(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{Z} + V\mathfrak{u}\mathfrak{Z}\right\} = -KV\mathfrak{E}\mathfrak{v} - K\nabla\mathfrak{Z}\mathfrak{v} \quad (299)$$

zu setzen wäre.

Sechster Abschnitt.

Gedrängte Uebersicht über die übrigen Theile der Maxwell'schen Theorie.

Vorbemerkungen.

In den vorhergehenden Abschnitten habe ich die für die unmittelbare Anwendung wichtigsten Theile der Elektricitätslehre in jener Fassung, wie sie durch die Maxwell'schen Arbeiten begründet wurde, in grösserer Ausführlichkeit behandelt. Der Leser sollte dadurch mit der Anschauungsweise und den wichtigsten Begriffen der Maxwell'schen Theorie so weit vertraut gemacht werden, dass er in den Stand gesetzt würde, sie bei seinen eigenen Arbeiten mit voller Sicherheit zu verwenden. Diese Sicherheit und das Vertrauen in die Zuverlässigkeit der gewählten Grundlagen wird aber in allen Gebieten der Wissenschaft durch eine möglichst elementare und leichtverständliche Behandlung des Stoffes am besten gewonnen. Eine solche bildet auch die beste Vorbereitung für das Studium der schwierigeren Probleme. Diese Rücksicht war für mich überall in diesem Werke die entscheidende. Jene Bestandtheile der Maxwell'schen Lehre, zu deren Behandlung ich jetzt übergehe, erscheinen von diesem Gesichtspunkte aus als die minder bedeutungsvollen, so wichtig auch in anderer Hinsicht namentlich die dazu gehörige Theorie der elektromagnetischen Wellen ist. Eine erschöpfende Darstellung der Theorie dürfte über sie nicht so flüchtig hinweggehen, wie ich es hier thun werde. Dem Zwecke dieses Buches, das ja nur eine Einführung in die Maxwell'sche Theorie bilden sollte, entspricht es aber besser, wenn von jenen Theilen nur eine kurz gedrängte Uebersicht gegeben wird. — Wenn ich später zur Bearbeitung eines zweiten Bandes Veranlassung finden sollte, werde ich auf diese Punkte ausführlicher eingehen.

Erstes Capitel.

Die Herleitung der Gleichungen des elektromagnetischen Feldes aus den allgemeinen Principien der Mechanik.

§ 133. Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen Ableitung.

Die gewöhnliche Mechanik beschäftigt sich nur mit den ponderomotorischen Kräften und den durch sie hervorgerufenen Bewegungserscheinungen der materiellen Systeme. Zunächst sind nur für diese allein ihre Sätze zuverlässig anwendbar, da die Voraussetzungen, aus denen diese Sätze hergeleitet sind, durch die Erfahrung überall bestätigt werden. In der Elektricitätslehre haben wir es aber nicht ausschliesslich mit ponderomotorischen, sondern daneben auch mit elektrischen und mit magnetischen Kräften zu thun. Es kann daher gewiss sehr zweifelhaft erscheinen, ob auch auf diese die Sätze der Mechanik ohne Weiteres übertragen werden dürfen. Selbst wenn wir ein elektrisches Fluidum voraussetzen wollten, an dem die elektrischen Kräfte in analoger Weise wie die ponderomotorischen an der gewöhnlichen Materie wirken, bleibt doch noch der Zweifel offen, ob dieses Fluidum auch die Eigenschaft der Trägheit besitzt, die für die gewöhnliche Materie charakteristisch ist und die bei der Formulirung aller Sätze der Dynamik entscheidend mitwirkt. Der Zweifel ist nicht nur zulässig, sondern die Erfahrungsthatsachen führen eher dazu, ihn zu bestärken, als ihn zu widerlegen. So oft man wenigstens im Banne des Vorstellungskreises der materialistischen Theorie der Elektricität die von dieser nahezu geforderte oder doch als sehr wahrscheinlich hingestellte „Trägheit der Elektricität“

experimentell nachzuweisen suchte, wurde man zu negativen Ergebnissen geführt.

Allerdings lag diesen Versuchen stets die Annahme zu Grunde, dass es sich beim elektrischen Strome nur um Bewegungen im Innern der stromführenden Leiter handle und man kann daher jene Misserfolge dahin deuten, dass diese Annahme unzulässig war, dass Bewegungen vielmehr auch überall im magnetischen Felde des Stromes auftreten. Dies führt dann von selbst dazu, in jedem magnetischen Felde, auch in dem von permanenten Magneten ausgehenden, Bewegungen unbekannter Art vorauszusetzen, also etwa anzunehmen, dass das, was wir die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ nennen, in Wirklichkeit die Geschwindigkeit einer Bewegung (des Aethers) ist.

Das, was wir jetzt als die magnetische Energie des Stromes bezeichnen, ist dann als die kinetische Energie jener Bewegung zu deuten. Hiermit erklärt sich die Thatsache, dass die Energie eines Stromes nicht ausschliesslich von der Stromstärke, der Länge und dem Querschnitte des Drahtes, sondern auch von der besonderen Gestalt der Drahtmittellinie und der Nachbarschaft anderer Ströme oder Magnete, sowie von dem Medium, in dem er sich befindet, abhängt. Damit ist auch eine Trägheit der sich bewegenden Substanz festgestellt, wenn auch in anderem Zusammenhange, als sie früher vermuthet wurde und wir dürfen nun wieder mit mehr Vertrauen den Versuch unternehmen, die für die träge Materie gültigen dynamischen Gesetze auf diese Bewegungserscheinungen zur Anwendung zu bringen.

Es ist hierfür nicht unbedingt nöthig, die Vorstellungen von der Art des Bewegungsvorganges so weit zu specialisiren, als es vorher angedeutet war. Nöthig ist zunächst nur, dass wir annehmen, die Energie im Felde eines Stromes sei kinetischer Art, was zugleich einschliesst, dass irgend etwas, was der Trägheit der ponderablen Materie mechanisch äquivalent ist, dabei mit ins Spiel kommt. Um dies auszudrücken, führte Maxwell für die magnetische Energie des Feldes die Bezeichnung elektrokinetische Energie ein. Ferner müssen wir, um den Thatsachen gerecht zu werden, annehmen, dass die Geschwindigkeit jener unbekannten Bewegung in der Umgebung eines oder mehrerer Ströme von den Stromstärken linear abhängig ist. Ueber den Mechanismus, durch den diese Abhängigkeit bedingt wird, bedürfen wir dagegen sonst keiner specielleren Voraussetzung.

Es ist gewiss verlockend genug, die Consequenzen abzuleiten, die sich aus dieser Vorstellung von der Natur des elektromagnetischen Feldes ergeben, wenn wir die allgemeinen Gleichungen der Mechanik darauf zur Anwendung bringen. Und es ist ferner gewiss ein höchst bemerkenswerthes Resultat, dass diese Consequenzen mit den Erfahrungsthatsachen in Uebereinstimmung stehen. Würde man aber, wenn diese Prüfung an der Erfahrung nicht möglich wäre, den Resultaten jener Betrachtung unbedingte Zuverlässigkeit zuschreiben dürfen, die doch erstens darauf beruhen, dass Bewegungen im magnetischen Felde vorkommen, die eine Trägheit des Bewegten und ferner noch voraussetzen, dass für das Bewegte dieselben Bewegungsgesetze wie für die ponderable Materie gültig sind? Die Antwort kann wohl nur eine verneinende sein, und wer diese Frage verneint, möge sich die zweite Frage vorlegen, ob es sich empfiehlt, die ganze Maxwell'sche Theorie auf derartige Betrachtungen zu gründen, da es doch, wie sich zeigte, möglichst ist, ihre charakteristischen Gleichungen ohne diese aus den einfachsten Erfahrungsthatsachen herzuleiten.

Desshalb kommt diesen Betrachtungen doch eine grosse Bedeutung zu, nicht als Stützen des ganzen Systems, sondern als dem werthvollsten Mittel für die fernere Erforschung des wahren Mechanismus im elektromagnetischen Felde. Auf sie stützt sich auch unmittelbar eine der plausibelsten Vorstellungen über diesen Mechanismus, nämlich die schon vorher erwähnte, dass im magnetischen Felde der Aether überall in der Richtung der magnetischen Inductionslinien in Bewegung ist. Freilich erweist sich auch diese Vorstellung bei eingehender Prüfung nicht überall zulänglich und es ist bisher überhaupt nicht gelungen, einen Mechanismus zu ersinnen, der das leisten könnte, was man von dem hypothetischen Mechanismus bei diesen Betrachtungen verlangt, so dass alle Erfahrungsthatsachen daraus hinreichend erklärt werden könnten.

§ 134. Cyklische Bewegungen.

In einem constanten elektromagnetischen Felde ändert sich die Geschwindigkeit der von der dynamischen Theorie vorausgesetzten Bewegung der Zeit nach nicht. Sie ist, wie schon vorher bemerkt war, an jeder Stelle des Feldes eine lineare Function der einzelnen Stromintensitäten, deren Coefficienten von der räumlichen Anordnung des ganzen Systems, besonders auch der etwa vorkommenden permanenten Magnete u. s. w. und von der Lage des betrachteten Aufpunktes abhängig sind. Bleibt das Feld nicht constant, so wollen wir jedoch annehmen, dass die Geschwindigkeiten der hypothetischen Bewegung sehr gross sind im Vergleiche zu den vorkommenden Aenderungen, so dass für relativ kleine Zeiten die Bewegung so vor sich geht, als ob das Feld constant wäre. In einer solchen kurzen Zeit soll also die Aenderung des Feldes nur unmerklich gegenüber den Wegen sein, die währenddessen von dem Bewegten infolge der hypothetischen Geschwindigkeiten zurückgelegt werden.

Eine Bewegung dieser Art nennt man nach v. Helmholtz eine cyklische. Der augenblickliche Zustand des Systems sei durch eine gewisse Anzahl von Parametern definirt. Diese lassen sich in zwei Gruppen bringen. Die zur einen Gruppe gehörigen ändern sich während einer rein cyklischen Bewegung gar nicht und nur langsam, falls die Bewegung sich wenigstens innerhalb kleiner Zeiten als eine cyklische in dem vorher erwähnten Sinne ansehen lässt; die anderen wollen wir die Coordinaten der cyklischen Bewegung nennen. Diese Coordinaten wachsen proportional mit der Zeit, aber so, dass der Zustand des Feldes dem Begriffe der cyklischen Bewegung entsprechend, nicht von dem Werthe der Coordinaten selbst, sondern von deren Differentialquotienten nach der Zeit abhängt.

Der Sinn dieser Festsetzungen ergibt sich deutlicher, wenn wir sie auf ein bestimmtes Beispiel beziehen und zwar wollen wir dazu ein System wählen, das aus zwei Stromringen mit eingeprägten elektrischen Kräften in einem Medium von constanter Permeabilität gebildet wird. Der eine Stromring bleibe dauernd in Ruhe und der andere sei ohne Formänderung beweglich. Jede Lage des beweglichen Stromringes lässt sich dann durch zwei Vectorgrössen eindeutig definiren, nämlich durch einen Radiusvector, der die Verschiebung eines beliebigen Punktes auf dem Stromringe aus der Anfangsanlage und einen Vector, der die Drehung angibt, die der Körper um jenen Punkt ausführen muss, damit er nach vollzogener Translation in die Endlage übergeführt wird. Bleibt die eingeprägte elektrische Kraft in jedem Stromringe constant, so bilden diese beiden Vectoren die einzigen langsam veränderlichen Parameter des Systems.

Bleiben beide Parameter längere Zeit hindurch constant, so gilt dies auch von dem elektromagnetischen Felde. Wir haben es aber hierbei nicht mit einem Ruhezustande zu thun, sondern mit einem stationären Zustande, währenddessen fortwährend Energieumsätze stattfinden. Wir müssen daher annehmen, dass gewisse Grössen in einem mit der Zeit gleichmässig fortschreitenden Wachsthume begriffen sind, die zwar auf das elektromagnetische Feld selbst ohne Einfluss sind, deren Werthe aber zu jeder Zeit ein Maass für die bis dahin erfolgten Energieumsätze bilden. Sie sind die Coordinaten der cyklischen Bewegung oder kurz die cyklischen Coordinaten des Systems.

Noch anschaulicher wird diese Betrachtung durch die Einführung des Begriffes der Antriebspunkte. In einem zwangläufigen Mechanismus, in dem nur ein Freiheitsgrad der Bewegung vorkommt, können wir irgend einen materiellen Punkt auf einem der bewegten Theile als den Antriebspunkt des Mechanismus betrachten, so nämlich, dass die Bewegung des ganzen Systems völlig bestimmt ist, sobald die Bewegung des Antriebspunktes gegeben ist. Irgend einer Kraft, die an dem Mechanismus wirkt, lässt sich dann ferner stets durch eine am Antriebspunkte angreifende das Gleichgewicht halten, oder umgekehrt, alle Kräfte lassen sich durch eine einzige am Antriebspunkte vollständig ersetzen. Da der Antriebspunkt sich nur auf einer durch die Systembedingungen unzweideutig vorgeschriebenen Bahn verschieben kann, kommt es hierbei nur auf solche Kräfte am Antriebspunkte an, die in die Richtung der Bahn fallen.

Ein cyklisches System dieser Art heisst ein Monocykel. Als cyklische Coordinate wählen wir den Weg des Antriebspunktes. — Das hier betrachtete System der beiden Stromringe hat zwei Antriebspunkte, deren Bewegungen unabhängig von einander erfolgen können. Wir haben daher auch zwei cyklische Coordinaten. Sie sind scalare Grössen, die wir mit y_1 und y_2 bezeichnen. So lange die Stromstärken constant sind, wachsen beide proportional mit der Zeit; wir können uns darunter die Elektricitätsmengen denken, die von Anbeginn an durch jeden Querschnitt des betreffenden Stromringes flossen.

Hieraus folgt, dass die Stromintensitäten selbst durch die Differentialquotienten von y_1 und y_2 nach der Zeit dargestellt werden.

Denken wir uns die eingeprägten Kräfte an jedem Stromringe auf dessen Antriebspunkt in der vorher besprochenen Weise reducirt, so ist die geleistete Arbeit gleich dem Producte aus der so reducirten Kraft und dem Wege des Antriebspunktes, der im Zeitelemente dt am ersten Stromringe gleich dy_1 oder gleich $\dot{y}_1 dt$ ist, wenn der Punkt wie gewöhnlich eine Differentiation nach der Zeit bedeutet.

§ 135. Die Gleichung von Lagrange.

Aus den Aenderungen der kinetischen Energie eines materiellen Systems, kann man mit Hülfe der Gleichung von Lagrange die an den Antriebspunkten wirkenden (oder auf sie reducirten) Kräfte berechnen. Für die Grösse der Kraft F_r

am Antriebspunkte r gibt diese Gleichung (die hier als bekannt vorausgesetzt wird), den Werth

$$F_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (300)$$

Hierin ist für die kinetische Energie T ein Ausdruck einzusetzen, der durch Summirung von $\frac{1}{2}mv^2$ über alle Theile des Systems gewonnen werden kann. Unter q_r ist jener Parameter zu verstehen, der den Weg des Antriebspunktes r angibt, $\dot{q}_r$ ist daher die Geschwindigkeit dieses Antriebspunktes und die Geschwindigkeit v eines beliebigen Massenpunktes ist eine lineare Function der Geschwindigkeiten $\dot{q}$. T ist daher eine quadratische Function der Geschwindigkeiten $\dot{q}$, deren Coefficienten Functionen der Parameter q sind. — Durch Gleichung (300) wird zunächst nur der Tensor der Kraft F_r bestimmt; die Richtung ist aber schon vorher bekannt, da sie in die Bahn des Antriebspunktes fallen muss, die durch die Systembedingungen zugleich mit gegeben ist.

Gleichung (300) gilt unter der Voraussetzung, dass die Arbeit der Kräfte F vollständig zur Erhöhung der kinetischen Energie verwendet wird. Kommen Reibungswiderstände vor, so sind sie besonders in Rechnung zu stellen.

§ 136. Anwendung auf das Bicykel.

Uns interessirt jetzt nur die Anwendung, die sich von Gleichung (300) auf das in § 134 näher definirte System mit zwei cyklischen Coordinaten machen lässt, das man als Bicykel — oder auch nach dem Vorschlage von Ebert als Dicykel — bezeichnet. Für den Tensor v_i der Geschwindigkeit irgend eines Massenpunktes m_i erhalten wir hier unter Beibehaltung der Bezeichnungen y_1 und y_2 für die beiden cyklischen Coordinaten

$$v_i = a_i \dot{y}_1 + b_i \dot{y}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (301)$$

Die Coefficienten a_i und b_i sind von den cyklischen Coordinaten unabhängig, aber abhängig von den langsam veränderlichen Parametern, die die räumliche Lage des beweglichen Stromringes beschreiben. Für T erhalten wir

$$T = \dot{y}_1^2 \sum \tfrac{1}{2} m_i a_i^2 + \dot{y}_2^2 \sum \tfrac{1}{2} m_i b_i^2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 \sum m_i a_i b_i \quad (302)$$

Mit

$$A = \Sigma m_i a_i^2, \quad B = \Sigma m_i b_i^2, \quad C = \Sigma m_i a_i b_i \quad . \quad (303)$$

geht dies in einfachster Schreibweise über in

$$T = \tfrac{1}{2} A \dot{y}_1^2 + \tfrac{1}{2} B \dot{y}_2^2 + C \dot{y}_1 \dot{y}_2 . \quad . \quad . \quad . \quad (304)$$

Auch die neu eingeführten Coefficienten A, B, C sind Functionen der langsam veränderlichen Parameter, sie sind aber unabhängig von den cyklischen Coordinaten, wie schon daraus hervorgeht, dass nach dem Begriffe der cyklischen Bewegung T constant bleiben muss, wenn die Bewegung im strengsten Sinne cyklisch ist.

Für die Kraft Y_1, die an dem zur cyklischen Coordinate y_1 gehörigen Antriebspunkte wirkt, erhalten wir nach Gleichung (300)

$$Y_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_1} .$$

Das zweite Glied liefert nach den vorhergehenden Bemerkungen Null und aus dem ersten erhalten wir nach Gleichung (304)

und ebenso
$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \frac{d}{dt}(A \dot{y}_1 + C \dot{y}_2) \\ Y_2 &= \frac{d}{dt}(B \dot{y}_2 + C \dot{y}_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (305)$$

Auch für die räumliche Bewegung des einen Stromringes können wir uns Antriebspunkte in derselben Weise ausgesucht denken; ihre Zahl ist, da wir von Formänderungen absehen wollten, gleich 6. Die zugehörigen Parameter sind nun scalare Grössen und die an den Antriebspunkten wirkenden Kräfte sind der Richtung nach bereits gegeben, so dass es sich nur noch um die Berechnung ihrer Tensoren handelt. Nennen wir die Grösse der am Antriebspunkt r angreifenden

Kraft X_r und den zugehörigen Parameter x_r, so erhalten wir aus Gleichung (300)

$$X_r = -\frac{\partial T}{\partial x_r} \quad \cdots\cdots \quad (306)$$

denn T ist unabhängig von den Geschwindigkeiten $\dot{x}$. Selbstverständlich ist die kinetische Energie der ponderabeln Masse in dem Ausdrucke (304) nicht eingeschlossen; sie ist entweder ganz zu vernachlässigen mit der Begründung, dass die Parameter x nur langsam veränderlich, die $\dot{x}$ also sehr klein sein sollten, oder sie muss, wenn man dies nicht voraussetzen will, besonders berücksichtigt werden. — Bei weiterer Ausführung der Differentiation erhält man

$$X_r = -\tfrac{1}{2}\dot{y}_1^2 \frac{\partial A}{\partial x_r} - \tfrac{1}{2}\dot{y}_2^2 \frac{\partial B}{\partial x_r} - \dot{y}_1 \dot{y}_2 \frac{\partial C}{\partial x_r} \quad \cdot\cdot \quad (307)$$

§ 137. Vergleich mit den früheren Ergebnissen.

Der durch Gleichung (304) angegebene Ausdruck für die elektrokinetische Energie des Systems der zwei Stromringe wird mit dem in Gleichung (259) aufgestellten Werthe der magnetischen Energie des Feldes identisch, sobald man setzt

$$A = L_1, \quad B = L_2, \quad C = M,$$

denn die Differentialquotienten $\dot{y}_1$ und $\dot{y}_2$ der cyklischen Coordinaten sind schon vorher als die Stromstärken gedeutet worden, entsprechen also den früher mit C_1 und C_2 bezeichneten Grössen.

Der Differentialquotient $\partial T/\partial \dot{y}_1$, also der Werth $A\dot{y}_1 + C\dot{y}_2$, der auch als das elektrische Moment des ersten Stromringes bezeichnet wird, entspricht nun genau dem in § 128 mit Ω_1 bezeichneten Werthe, stellt also die magnetische Induction durch den ersten Stromring dar. Die Gleichungen (305) sprechen also das Inductionsgesetz aus, wenn wir unter Y_1 die inducirte elektromotorische Kraft im ersten Stromringe verstehen. [Vgl. auch Gl. (261), S. 291.]

X_r ist eine Kraft, deren Antriebspunkt zu einem der Parameter gehört, die die sichtbare Bewegung des Systems bestimmen, also eine ponderomotorische Kraft. Um uns zu überzeugen, dass sie in Uebereinstimmung mit den früher dafür aufgestellten Werthen steht, denken wir uns eine unendlich kleine virtuelle Bewegung ausgeführt und ermitteln die von allen X hierbei geleisteten Arbeiten. Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist das System der Kräfte X dem früher gefundenen mechanisch äquivalent, wenn die virtuellen Arbeiten in beiden Fällen gleich sind.

Vorher ist indessen noch darauf hinzuweisen, dass X_r hier eine von aussen her an dem Systeme anzubringende Kraft bedeutet, während früher umgekehrt die Kraft ermittelt wurde, die von dem Systeme nach aussen hin ausgeübt wurde. Dies hat natürlich einen Unterschied im Vorzeichen zur Folge.

Nach Gleichung (306) ist die Arbeit der Kraft X_r, wenn wir die virtuelle Verrückung des Antriebspunktes r mit δx_r bezeichnen, gleich

$$-\frac{\partial T}{\partial x_r} \cdot \delta x_r,$$

die Arbeit aller ponderomotorischen Kräfte X also gleich δT, wenn wir unter δ jetzt eine Variation verstehen, die nur durch die Aenderung der Parameter x bei constanten Stromstärken zu Stande kommt. Dieser Werth stimmt aber, vom Vorzeichen abgesehen, genau mit dem in § 128 gefundenen Betrage der Arbeit der elektrodynamischen Kräfte für eine beliebige unendlich kleine Bewegung (vgl. S. 346)

$$\tfrac{1}{2} C_1^2 dL_1 + \tfrac{1}{2} C_2^2 dL_2 + C_1 C_2 dM$$

überein, wenn man den Coefficienten von T die vorher festgestellte Bedeutung beilegt. Die Abweichung des Vorzeichens findet ihre Erklärung in einer vorhergehenden Bemerkung.

Damit ist bewiesen, dass auch die ponderomotorischen Kräfte, auf die man durch die Anwendung der Sätze der gewöhnlichen Mechanik geführt wird, wenn man das System der zwei Stromringe als einen bicyklichen Mechanismus auffasst, den aus der Beobachtung hergeleiteten mechanisch äquivalent sind.

Wir dürfen daher mit einem gewissen Rechte vermuthen, dass ein von elektrischen Strömen gebildetes Feld in der That einen Mechanismus bildet, in dem sich imponderable Massen bewegen, der Art, dass mit dieser Bewegung eine kinetische Energie verbunden ist und dass die Bewegung selbst den Sätzen der gewöhnlichen Mechanik unterworfen ist.

Zweites Capitel.

Der Maxwell'sche Zwangszustand.

§ 138. Allgemeine Betrachtungen.

Die Vorstellungen Maxwell's über die Natur des Zwanges, dem z. B. ein Dielektricum im elektrostatischen Felde ausgesetzt ist, knüpfen unmittelbar an die Auffassung der Spannungszüstände in festen oder flüssigen Körpern an, deren man sich in der Elasticitätstheorie oder in der Hydraulik bedient. Wie z. B. auf einen in einer vollkommenen oder in einer zähen Flüssigkeit schwimmenden Körper von der Flüssigkeit Kräfte ausgeübt werden, die an jeder Stelle durch den Spannungszustand der Flüssigkeit bedingt sind, erfährt auch ein elektrisirter Körper nach dieser Theorie von allen Seiten her, wo er an den Luftraum angrenzt, eine ponderomotorische Einwirkung dieses Dielektricums. In beiden Fällen ist der Spannungszustand über das ganze übrige Medium überall in stetiger Weise verbreitet; erst an der Grenzfläche offenbart er sich aber durch eine den Bewegungszustand des eingetauchten Körpers beeinflussende Oberflächenvertheilung von Kräften, die für diesen Körper als äussere Kräfte zu bezeichnen sind.

Die Frage liegt hier nahe — und sie ist oft genug in einem der Maxwell'schen Darstellung ungünstigen Sinne beantwortet worden —, ob es gerade in einer Flüssigkeit möglich erscheine, dass neben dem hydrostatischen Drucke noch eine davon abweichende Spannungsvertheilung, wie sie die Maxwell'sche Theorie liefert, auftreten könne, ohne das Gleichgewicht der Flüssigkeit zu stören. Darauf ist aber zu erwidern, dass der von der Flüssigkeit eingenommene Raum zugleich noch vom Aether angefüllt ist, den wir überall als den eigentlichen Träger aller elektrischen und magnetischen Erscheinungen zu betrachten haben. Ueber die näheren Beziehungen zwischen dem Aether und der ponderablen Materie ist uns vorläufig nichts Näheres bekannt, und es steht daher z. B. der Annahme nichts im Wege, dass sich bei den Erscheinungen, die in der gewöhnlichen Hydraulik besprochen werden, der Aether ganz neutral verhalte, während er im Zustande elektrischer oder magnetischer Erregung eine Abweichung von dem dort gefundenen Druckvertheilungsgesetze hervorbringen könnte. In der That machen sich die elektrischen und magnetischen Kräfte ja auch noch, wie wir annehmen müssen, im sogenannten Vacuum geltend.

Ein Einspruch aus dem bezeichneten Grunde lässt sich daher gegen die Maxwell'sche Darstellung nicht aufrecht erhalten. Immerhin erscheint es aus anderen Gründen nicht gerade sehr wahrscheinlich, dass der wahre Mechanismus der Kraftübertragung im elektrischen oder magnetischen Felde durch diese Darstellung getreu wiedergegeben würde. Wohl die überwiegende Mehrzahl der heutigen Anhänger der Maxwell'schen Theorie betrachtet dies vielmehr als zweifelhaft und erblickt in der Maxwell'schen Spannungsvertheilung nur ein Beispiel für die Möglichkeit, die Kraftübertragung durch das Medium auf relativ sehr einfache Weise in Uebereinstimmung mit den wichtigsten Erfahrungsthatsachen zu erklären.

Um den Spannungzustand in einem festen Körper zu untersuchen, beginnt man in der Elasticitätstheorie damit, durch einen gegebenen Aufpunkt eine unendlich kleine Fläche, deren Grösse mit df bezeichnet sei, zu legen. Die durch df von einander getrennten Massentheilchen des Körpers üben Kräfte aufeinander aus, die nach dem Gesetze der Action und Reaction von gleicher Grösse aber entgegengesetzter Richtung sind, jenachdem wir die Wirkung auf die diesseits oder auf die jenseits gelegenen Massen ins Auge fassen. Ziehen wir eine Einheitsnormale $\mathfrak{N}$ in einer der beiden Richtungen, so soll die durch die Fläche df übertragene Kraft, die auf jene Seite der Fläche einwirkt, für die $\mathfrak{N}$ eine innere Normale bildet, durch den Ausdruck

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{N}} df$$

dargestellt werden, wobei $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{p}_{\mathfrak{N}}$ nur ein Index ist. Dies ist möglich, da die Kraft jedenfalls der Grösse der Fläche df proportional ist. Hierdurch wird der zur Einheitsnormale $\mathfrak{N}$ gehörige Vector $\mathfrak{p}_{\mathfrak{N}}$ definirt; man nennt ihn die specifische (nämlich die auf die Flächeneinheit bezogene) Spannung des Körpers für die betreffende Normalenrichtung. Setzt man $\mathfrak{N}' = - \mathfrak{N}$, so ist nach dem Gesetze der Action und Reaction

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{N}} = - \mathfrak{p}_{\mathfrak{N}'} .$$

Für jeden Aufpunkt ist $\mathfrak{p}$ von der Richtung der gezogenen Normalen $\mathfrak{N}$ abhängig, und zwar bildet es, wie sich sofort zeigen wird, eine lineare Vectorfunction von $\mathfrak{N}$. Ich habe nicht die Absicht, hier näher auf die Theorie dieser Functionen einzugehen und gebrauche diesen Ausdruck daher nur zur abgekürzten Bezeichnung des weiter folgenden Zusammenhanges.

Der nächste Schritt der Elasticitätstheorie (ebenso auch der Hydraulik) besteht darin, ein unendlich kleines Element und zwar gewöhnlich ein rechtwinkliges Parallelepipedum, oder ein Tetraëder mit drei zu einander senkrechten Seitenflächen, im Körper abzugrenzen und die Gleichgewichtsbedingungen für die daran wirkenden Kräfte aufzustellen. Betrachten wir der Einfachheit halber ein solches Tetraëder, von dem drei Seitenflächen zu drei rechtwinkligen Coordinaten-Ebenen parallel gehen und von dem die zu einander rechtwinkligen Kanten die Längen dx, dy, dz haben, so haben wir die Gleichgewichtsbedingung

$$\tfrac{1}{2} dy dz \cdot \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}} + \tfrac{1}{2} dx dz \cdot \mathfrak{p}_{\mathfrak{j}} + \tfrac{1}{2} dx dy \cdot \mathfrak{p}_{\mathfrak{k}} + df \cdot \mathfrak{p}_{\mathfrak{N}} = 0 ,$$

wobei df die Fläche der vierten Tetraëderseite und $\mathfrak{N}$ die zu dieser gehörige innere Normale bedeutet. Die Seitenfläche $dy dz/2$ ist die rechtwinklige Projection der Fläche df auf die

yz-Ebene und daher gleich df mal dem Cosinus des Winkels zwischen beiden Flächen. Dieser aber ist, nach der Definition des scalaren Products, gleich $-\mathfrak{i}\mathfrak{N}$. Setzt man diesen Werth und entsprechend die beiden andern in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{N} = \mathfrak{p}_\mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i}\mathfrak{N} + \mathfrak{p}_\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j}\mathfrak{N} + \mathfrak{p}_\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{N} \quad . \quad . \quad . \quad (308)$$

Hiermit ist $\mathfrak{p}_\mathfrak{N}$ als Function der Normalen $\mathfrak{N}$ dargestellt, und der Spannungszustand in einem gegebenen Punkte ist daher vollständig durch drei Vectoren $\mathfrak{p}_\mathfrak{i}$, $\mathfrak{p}_\mathfrak{j}$, $\mathfrak{p}_\mathfrak{k}$, bezw. durch neun scalare Grössen, nämlich durch die im Allgemeinen von einander unabhängigen Componenten dieser Vectoren definirt.

In die Gleichgewichtsbedingung am Tetraëder treten die an der Masse des Tetraëders wirkenden Kräfte (auch die Trägheitskräfte, Centrifugalkräfte u. s. w., falls sich der Körper in ungleichförmiger Bewegung befindet) nicht ein, da sie, wie das Tetraëdervolumen, unendlich klein dritter Ordnung und daher gegen die nur von der zweiten Ordnung unendlich kleinen Grössen der auf die Seitenflächen wirkenden Spannungen zu vernachlässigen sind.

Für das Gleichgewicht der Kräfte an einem rechtwinkligen Parallelepipedum von den Kantenlängen dx, dy, dz erhält man, wenn die auf das Einheitsvolumen wirkende Massenkraft mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet wird,

$$dydz \cdot \mathfrak{p}_\mathfrak{i} - dydz\left(\mathfrak{p}_\mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{i}}{\partial x} dx\right) + dxdz \cdot \mathfrak{p}_\mathfrak{j} - dxdz\left(\mathfrak{p}_\mathfrak{j} + \frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{j}}{\partial y} dy\right)$$
$$+ dxdy \cdot \mathfrak{p}_\mathfrak{k} - dxdy\left(\mathfrak{p}_\mathfrak{k} + \frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{k}}{\partial z} \cdot dz\right) + \mathfrak{F} dxdydz = 0.$$

Hier bleiben nur die von der dritten Ordnung unendlich kleinen Glieder übrig und man erhält

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{i}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{j}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_\mathfrak{k}}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (309)$$

Hierbei ist $\mathfrak{F}$ die von der Fernwirkungstheorie angenommene Fernkraft (mit Einschluss der Trägheitskraft bei ungleichförmig bewegten Körpern), bei den gewöhnlichen Anwendungen der Elasticitätslehre die Schwerkraft, mit der die Spannungen im Gleichgewicht stehen müssen. Soll dagegen, wie hier, eine scheinbare Fernkraft als Resultirende von Spannungskräften erklärt werden, so ist das Vorzeichen des Ausdrucks für $\mathfrak{F}$ in Gleichung (309) umzukehren.

Ausser der Kraft $\mathfrak{F}$, die durch den Mittelpunkt des Parallelepipedums geht, kann im Allgemeinen (nämlich bei Magneten) noch ein statisches Moment auf die Körpermasse einwirken, das eine Drehung des Körperelements herbeizuführen strebt. Bezeichnen wir dieses auf den Mittelpunkt bezogene Moment mit $\mathfrak{M}\,dx\,dy\,dz$, so erhalten wir als zweite Gleichgewichtsbedingung der Spannungen mit den äusseren ponderomotorischen Einwirkungen durch Anwendung des Momentensatzes für den Mittelpunkt

$$\mathfrak{M} = V\mathfrak{i}\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}} + V\mathfrak{j}\mathfrak{p}_{\mathfrak{j}} + V\mathfrak{k}\mathfrak{p}_{\mathfrak{k}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (310)$$

Auch hier sind die Vorzeichen auf der rechten Seite umzukehren, wenn $\mathfrak{M}$ mit den Momenten der Spannungen nicht im Gleichgewichte steht, sondern vielmehr als die Resultirende daraus erklärt werden soll.

Zerlegt man die $\mathfrak{p}$ in ihre Componenten, setzt also z. B.

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{i}p_{\mathfrak{i}1} + \mathfrak{j}p_{\mathfrak{i}2} + \mathfrak{k}p_{\mathfrak{i}3},$$

so lässt sich Gleichung (310) nach Ausführung der Vectorproducte auch schreiben

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{i}(p_{\mathfrak{j}3} - p_{\mathfrak{k}2}) + \mathfrak{j}(p_{\mathfrak{k}1} - p_{\mathfrak{i}3}) + \mathfrak{k}(p_{\mathfrak{i}2} - p_{\mathfrak{j}1}) \,.\,. (311)$$

Bei den gewöhnlichen Anwendungen der Elasticitätstheorie kommt eine verdrehende ponderomotorische Einwirkung von aussen her nicht vor, $\mathfrak{M}$ ist also gleich Null und man hat an Stelle von Gleichung (311)

$$p_{\mathfrak{j}3} = p_{\mathfrak{k}2}, \quad p_{\mathfrak{k}1} = p_{\mathfrak{i}3}, \quad p_{\mathfrak{i}2} = p_{\mathfrak{j}1}.$$

Der Spannungszustand an jeder Stelle des Körpers wird dann nur noch durch sechs von einander unabhängige Spannungscomponenten definirt. Bei dem Maxwell'schen Zwangszustand trifft diese Bedingung aber nicht immer zu und wir haben im

24*

Allgemeinen alle neun Spannungscomponenten beizubehalten. Bei den Fällen, die hier behandelt werden sollen, ist indessen $\mathfrak{M}$ immer gleich Null.

§ 139. Der Zwangszustand im elektrostatischen Felde.

Hier beschränke ich mich auf die Betrachtung des Falles, dass die Dielektricitätsconstante K überall denselben Werth hat. Die wahre Ladung ist dann überall das K-fache der freien und für die an einem Volumen-Elemente dv auftretende elektrostatische Fernkraft erhält man

$$-\nabla \Psi \cdot \varrho_w dv \quad \text{oder} \quad -K \cdot \nabla \Psi \varrho_f dv,$$

wenn Ψ das von den freien Ladungen ausgehende elektrostatische Potential bezeichnet. Mit H... des Laplace'schen Satzes lässt sich dies überführen in

$$\frac{K}{4\pi} \nabla \Psi \cdot \nabla^2 \Psi dv.$$

Die vorher mit $\mathfrak{F}$ bezeichnete Fernkraft an der Volumeneinheit ist daher hier

$$\mathfrak{F} = \frac{K}{4\pi} \nabla \Psi \cdot \nabla^2 \Psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (312)$$

und das Moment $\mathfrak{M}$ ist hier gleich Null.

Soll nun das Zustandekommen der scheinbaren Fernkraft $\mathfrak{F}$ durch einen Spannungszustand im Dielektricum erklärt werden, so müssen die Vectoren $\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}$, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{j}}$, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{k}}$ bezw. ihre Componenten so in Ψ ausgedrückt werden, dass Gleichung (309) erfüllt ist und $\mathfrak{M}$ nach Gleichung (310) zu Null wird. Zu diesem Zwecke muss der in Gleichung (312) vorkommende Ausdruck $\nabla \Psi \cdot \nabla^2 \Psi$ weiter umgeformt werden. Für die $\mathfrak{i}$-Componente dieses Vectors lässt sich aber schreiben

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \cdot \nabla^2 \Psi = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2.$$

Im Ganzen erhält man daher

$$\nabla \Psi \cdot \nabla^2 \Psi$$

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{i}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right\}\\
&+\mathfrak{j}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\right\}\\
&+\mathfrak{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Dieser Werth kann noch in anderer Weise geordnet werden, wie folgt:

$$\nabla \Psi \cdot \nabla^2 \Psi$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\mathfrak{i}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right)+\mathfrak{j}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y}+\mathfrak{k}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right\}\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mathfrak{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y}+\mathfrak{j}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right)+\mathfrak{k}\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right\}\\
&+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mathfrak{i}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}+\mathfrak{j}\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z}+\mathfrak{k}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Damit ist die verlangte Umformung vollzogen und Gleichung (309) ist ebenso wie Gleichung (310) ohne Weiteres erfüllt, wenn wir setzen

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{p}_\mathfrak{i} &= -\frac{K}{4\pi}\left(\mathfrak{i}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right)+\mathfrak{j}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y}+\mathfrak{k}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\\
\mathfrak{p}_\mathfrak{j} &= -\frac{K}{4\pi}\left(\mathfrak{i}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y}+\mathfrak{j}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right)+\mathfrak{k}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)\\
\mathfrak{p}_\mathfrak{k} &= -\frac{K}{4\pi}\left(\mathfrak{i}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}+\mathfrak{j}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z}+\mathfrak{k}\cdot\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2\right)\right)
\end{aligned}\right\}(313)$$

Die Minuszeichen auf der rechten Seite erklären sich durch die auf Gleichung (309) folgenden Bemerkungen.

Die Richtung der Coordinatenachsen war beliebig. Um eine nähere Vorstellung von der Art des durch die Gleichungen (313) dargestellten Zwangszustandes zu erhalten, wollen wir jetzt annehmen, dass die $\mathfrak{i}$-Richtung mit der Richtung der elektrostatischen Kraft zusammenfalle. Bezeichnen wir den Tensor dieser Kraft mit F, so ist dann $F = -\partial\Psi/\partial x$, während

$\partial \Psi/\partial y$ und $\partial \Psi/\partial z$ zu Null werden. Für diese specielle Wahl der Achsenrichtungen erhält man daher

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}} = - \mathfrak{i} \frac{F^2}{8\pi} \cdot K; \quad \mathfrak{p}_{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j} \frac{F^2}{8\pi} \cdot K; \quad \mathfrak{p}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k} \frac{F^2}{8\pi} \cdot K \quad (314)$$

d. h. diese 3 Spannungen stehen sämmtlich senkrecht zu den zugehörigen Flächen, sie sind nach den Bezeichnungen der Elasticitätstheorie die drei Hauptspannungen an der betreffenden Stelle des Körpers. Ferner sind alle drei von gleicher Grösse. Nur im Vorzeichen findet eine Abweichung statt. Um uns über die Bedeutung dieser Vorzeichen Rechenschaft zu geben, bedenken wir, dass $\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}$ entgegengesetzt gerichtet ist wie die innere Normale $\mathfrak{i}$ jener Seite der Schnittfläche, zu der $\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}$ gehört, dass es also eine Zugkraft ist. Ein positives Vorzeichen wie bei $\mathfrak{p}_{\mathfrak{j}}$ und $\mathfrak{p}_{\mathfrak{k}}$ gibt dagegen Druckspannungen an.

Der Zwang im elektrostatischen Felde besteht demnach in einer Zugspannung längs der Kraftlinien, verbunden mit einem nach allen Seiten hin gleichen normalen Seitendrucke zwischen den einzelnen Kraftröhren; dem absoluten Betrage nach sind beide unter einander gleich und zwar kommt auf die Flächeneinheit die Kraft $F^2 K/8\pi$.

§ 140. Der Zwangszustand im magnetischen Felde eines elektrischen Stromes.

Die magnetische Permeabilität μ sei im ganzen Felde constant; ebenso sollen nirgends eingeprägte magnetische Kräfte vorkommen. Ueberall ist dann div $\mathfrak{H} = 0$, d. h. die Kraftlinien sind hier ebenso wie sonst stets die Inductionslinien in sich geschlossene Curven. Die ponderomotorischen Kräfte, die jetzt als Ergebniss eines Zwangszustandes erklärt werden sollen, sind die elektrodynamischen Kräfte an den elektrisch durchströmten Körpern. Für $\mathfrak{F}$ haben wir daher nach Gleichung (167) zu setzen

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{4\pi} V \operatorname{curl} \mathfrak{H} \mathfrak{B} = \frac{\mu}{4\pi} V \operatorname{curl} \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H}.$$

Das Moment $\mathfrak{M}$ ist hier wie im vorhergehenden Falle gleich Null zu setzen. Zur Bestimmung der Spannungen $\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}$, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{j}}$, $\mathfrak{p}_{\mathfrak{k}}$ nach Gleichung (309) muss abermals eine entsprechende Umformung des Ausdruckes für $\mathfrak{F}$ vorgenommen werden.

Für die $\mathfrak{i}$-Componente von $V\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{H}$ erhält man

$$\mathfrak{i}\left\{H_3\left(\frac{\partial H_1}{\partial z}-\frac{\partial H_3}{\partial x}\right)-H_2\left(\frac{\partial H_2}{\partial x}-\frac{\partial H_1}{\partial y}\right)\right\}$$

und dies lässt sich umformen in

$$\mathfrak{i}\left\{\frac{\partial H_1H_3}{\partial z}+\frac{\partial H_1H_2}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial H_1^2}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial H_2^2}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial H_3^2}{\partial x}-H_1\left(\frac{\partial H_1}{\partial x}+\frac{\partial H_2}{\partial y}+\frac{\partial H_3}{\partial z}\right)\right\}.$$

Der in der runden Klammer stehende Werth bildet die div von $\mathfrak{H}$ und ist daher nach den vorhergehenden Bemerkungen gleich Null. Formt man entsprechend auch die anderen Componenten um, so erhält man

$$\begin{aligned}V\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{H}=\;&\mathfrak{i}\left\{\frac{\partial H_1H_3}{\partial z}+\frac{\partial H_1H_2}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial H_1^2}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial H_2^2}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial H_3^2}{\partial x}\right\}\\&+\mathfrak{j}\left\{\frac{\partial H_1H_2}{\partial x}+\frac{\partial H_2H_3}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial H_2^2}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial H_1^2}{\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial H_3^2}{\partial y}\right\}\\&+\mathfrak{k}\left\{\frac{\partial H_2H_3}{\partial y}+\frac{\partial H_1H_3}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial H_3^2}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial H_1^2}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial H_2^2}{\partial z}\right\}.\end{aligned}$$

Ordnet man dies noch etwas anders, so erhält man für $\mathfrak{F}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}=\;&\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mathfrak{i}\cdot\tfrac{1}{2}(H_1^2-H_2^2-H_3^2)+\mathfrak{j}H_1H_2+\mathfrak{k}H_1H_3\right\}\\&+\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mathfrak{i}H_1H_2+\mathfrak{j}\cdot\tfrac{1}{2}(H_2^2-H_1^2-H_3^2)+\mathfrak{k}H_2H_3\right\}\\&+\frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mathfrak{i}H_1H_3+\mathfrak{j}H_2H_3+\mathfrak{k}\cdot\tfrac{1}{2}(H_3^2-H_1^2-H_2^2)\right\}.\end{aligned}$$

Der Vergleich mit Gleichung (309) zeigt uns, welche Werthe wir den Spannungen $\mathfrak{p}$ beilegen müssen, damit $\mathfrak{F}$ als deren Folge erscheint, nämlich

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}}&=-\frac{\mu}{4\pi}\left\{\mathfrak{i}\cdot\tfrac{1}{2}(H_1^2-H_2^2-H_3^2)+\mathfrak{j}H_1H_2+\mathfrak{k}H_1H_3\right\}\\\mathfrak{p}_{\mathfrak{j}}&=-\frac{\mu}{4\pi}\left\{\mathfrak{i}H_1H_2+\mathfrak{j}\cdot\tfrac{1}{2}(H_2^2-H_1^2-H_3^2)+\mathfrak{k}H_2H_3\right\}\\\mathfrak{p}_{\mathfrak{k}}&=-\frac{\mu}{4\pi}\left\{\mathfrak{i}H_1H_3+\mathfrak{j}H_2H_3+\mathfrak{k}\cdot\tfrac{1}{2}(H_3^2-H_1^2-H_2^2)\right\}\end{aligned}\right\}\quad(315)$$

Lassen wir die $\mathfrak{i}$-Richtung mit der Richtung von $\mathfrak{H}$ zusammenfallen, so geht dies über in

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}} = -\,\mathfrak{i}\,\frac{H^2}{8\pi}\mu\,; \quad \mathfrak{p}_{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j}\,\frac{H^2}{8\pi}\mu\,; \quad \mathfrak{p}_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k}\,\frac{H^2}{8\pi}\mu\,. \qquad (316)$$

Der Zwangszustand gleicht also völlig dem im elektrostatischen Felde auftretenden. An die Stelle der Intensität des elektrostatischen Feldes tritt hier die Intensität des magnetischen Feldes und an die Stelle der Dielektricitätsconstanten K die Permeabilität μ.

Für den Tensor der Hauptspannungen $H^2\mu/8\pi$ lässt sich übrigens auch $\mathfrak{B}\mathfrak{H}/8\pi$ schreiben, d. h. die Hauptspannungen sind numerisch gleich dem auf die Volumeneinheit bezogenen Inhalte an magnetischer (oder elektrokinetischer) Energie. — Eine analoge Bemerkung lässt sich übrigens auch an den Ausdruck (314) für die Hauptspannungen im elektrostatischen Felde knüpfen.

Die vorhergehende Betrachtung bleibt übrigens auch dann noch gültig, wenn das magnetische Feld nicht ausschliesslich von Strömen in einem Medium von constanter Permeabilität herrührt, falls nur an jenen Stellen, für die wir die $\mathfrak{p}$ berechnen wollen, die Permeabilität constant ist und keine eingeprägten magnetischen Kräfte auftreten.

§ 141. Zwangszustand im Innern von Magneten.

Als Magnete sind hier Körper zu verstehen, in denen entweder eingeprägte magnetische Kräfte vorkommen oder doch Körper, deren Permeabilität zum mindesten von der des umgebenden Mediums verschieden ist. Die Fernwirkungstheorie denkt sich diese Körper mit einer Vertheilung magnetischer Massen belegt, ohne auf die Unterschiede in der Permeabilität weiterhin Rücksicht zu nehmen. Dass es möglich ist, für alle ponderomotorischen Erscheinungen auf diese Weise Rechenschaft zu geben, ist längst nachgewiesen und durch den Vergleich mit der Erfahrung bestätigt. Wir wollen daher hier daran anknüpfen und untersuchen, wie der Zwangszustand beschaffen sein muss, um zu denselben Kraftäusserungen am Elementarparallelepipede eines Magneten zu führen.

Hierbei sei die in § 94 beschriebene Massenvertheilung zu Grunde gelegt. Die im Volumenelemente $dxdydz$ enthaltene freie magnetische Masse setzen wir also gleich — $\operatorname{div} \mathfrak{J} dxdydz$ (nach Gleichung 212) und die wahre magnetische Masse ist das μ-fache davon. Die Oberflächenbelegung von freiem Magnetismus auf der dem Coordinatenursprung zunächst gelegenen Rechteckfläche ist gleich $-J_1 dydz$, wenn J_1 die $\mathfrak{i}$-Componente der magnetischen Intensität $\mathfrak{J}$ bedeutet; auf der gegenüberliegenden Seite haben wir eine Belegung vom entgegengesetzten Vorzeichen.

An den zum Volumenelemente gehörigen Massen wirken nach der Fernwirkungstheorie ausser der Kraft

$$-\mu \operatorname{div} \mathfrak{J} dxdydz \cdot \mathfrak{H},$$

die an dem wahren Magnetismus im Innern des Parallelepipedums angreift, noch drei Kräftepaare an den Oberflächenbelegungen. Das statische Moment des an den beiden zur $\mathfrak{i}$-Richtung senkrechten Seitenflächen angreifenden Kräftepaares für irgend einen Momentenpunkt (denn für ein Kräftepaar ist das statische Moment bei jeder Lage des Momentenpunktes gleich gross) beträgt

$$V \mathfrak{i} \mathfrak{H} \cdot \mu J_1 dxdydz.$$

Der Factor μ kommt dadurch in den Ausdruck, dass die ponderomotorische Kraft an der Belegung mit wahrem Magnetismus angreift, die das μ-fache der früher angegebenen Belegung mit freiem Magnetismus bildet. Stellen wir den entsprechenden Ausdruck auch für die beiden anderen Kräftepaare auf, addiren, ziehen dabei $\mathfrak{i}J_1 + \mathfrak{j}J_2 + \mathfrak{k}J_3$ zu $\mathfrak{J}$ und $\mu\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{B}$ zusammen, so erhalten wir für das auf die Volumeneinheit bezogene statische Moment $\mathfrak{M}$ der ponderomotorischen Fernwirkung

$$\mathfrak{M} = V \mathfrak{J} \mathfrak{B} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (317)$$

Wir haben uns seither stets darauf beschränkt, solche magnetische Körper ins Auge zu fassen, für die $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{H}$ und daher auch $\mathfrak{J}$ gleich gerichtet sind. Bei hartem Eisen braucht dies nicht zuzutreffen. Wir wollen aber jetzt, wie seither überall in diesem Buche, davon absehen, auf jene Fälle einzugehen, bei denen eine Abweichung zwischen der Richtung der Kraft und der des entsprechenden Flusses ($\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$, bezw. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$) vorkommt, indem wir diese Fälle einer besonderen Behandlung vorbehalten.

Nach der Definition des Vectorproducts wird in unserem Falle $\mathfrak{M}$ zu Null. Für $\mathfrak{F}$ erhalten wir

$$\mathfrak{F} = -\mu \operatorname{div} \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{H} = \frac{\mu}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H}.$$

An Stelle von $\mathfrak{J}$ ist hierbei wieder mit Hülfe von Gleichung (211) $\mathfrak{H}$ eingeführt. Von elektrischen Strömen soll der Magnet nicht durchflossen sein. $\mathfrak{H}$ lässt sich daher, wenigstens in jenen Räumen, für die wir uns interessiren, von einem Potentiale ableiten, das mit Ψ bezeichnet werden mag. Damit wird

$$\mathfrak{F} = \frac{\mu}{4\pi} \nabla \Psi \cdot \nabla^2 \Psi.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich aber nur dadurch von dem in Gleichung (312) für die elektrische Kraft im elektrostatischen Felde gegebenen, dass K durch sein magnetisches Analogon μ ersetzt ist. Wir können daher die dort gefundene Lösung unmittelbar auf den hier vorliegenden Fall übertragen. Besonders gelten also die Gleichungen (313) und (314) sofort auch für das magnetische Feld, wenn man K durch μ ersetzt und unter F jetzt H versteht.

Der Spannungszustand, zu dem wir jetzt geführt wurden, ist vollständig mit dem in § 140 gefundenen und durch die Gleichungen (315) und (316) ausgedrückten identisch. Wir mussten dies auch von vornherein erwarten, da es sich im einen wie im anderen Falle darum handelte, ponderomotorische Kräfte in einem magnetischen Felde zu erklären.

Die drei in § 139, 140 und 141 behandelten Fälle können auch combinirt vorkommen. Die betreffenden Zwangszustände superponiren sich dann einfach.

Drittes Capitel.

Die elektromagnetischen Wellen in isotropen Medien.

§ 142. Ebene Wellen in einem ruhenden, isotropen und homogenen Dielektricum.

Die beiden Hauptgleichungen des elektromagnetischen Feldes lauten hier (vgl. Gleichung 154 und Gleichung 163)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = K\frac{d\mathfrak{E}}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (318)$$

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = -\mu\frac{d\mathfrak{H}}{dt} \quad \ldots \quad (319)$$

Dazu kommt, da μ constant ist,

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (320)$$

und, da keine wahren elektrischen Ladungen im Innern des Dielektricums vorkommen können und zugleich K constant ist,

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (321)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen, die die Hauptwurzeln der ganzen Maxwell'schen Theorie bilden, lässt sich der Verlauf der elektromagnetischen Wellen im Dielektricum leicht verfolgen. Eliminirt man $\mathfrak{E}$ aus den beiden Hauptgleichungen, indem man von der ersten den curl nimmt, die zweite nach t differentiirt und beide addirt, nachdem vorher die zweite noch mit K multiplicirt ist, so erhält man

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{H} = -K\mu\frac{d^2\mathfrak{H}}{dt^2} \quad \ldots \ldots \quad (322)$$

Nach Gleichung (72) geht dies mit Rücksicht auf Gleichung (320) über in

$$\nabla^2 \mathfrak{H} = K\mu\frac{d^2\mathfrak{H}}{dt^2} \quad \ldots \ldots \quad (323)$$

Umgekehrt kann man auch $\mathfrak{H}$ eliminiren, indem man Gleichung (318) mit μ multiplicirt und nach t differentiirt, hierauf von Gleichung (319) den curl nimmt und sie dann von der ersten subtrahirt. Man erhält dann

$$\mathrm{curl}^2 \mathfrak{E} = - K\mu \frac{d^2 \mathfrak{E}}{dt^2}$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (321)

$$\nabla^2 \mathfrak{E} = K\mu \frac{d^2 \mathfrak{E}}{dt^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (324)$$

Die Vectoren $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$, die den Zustand des elektromagnetischen Feldes in Verbindung mit den constanten Coefficienten K und μ für jeden Augenblick und für jede Stelle des Feldes vollständig definiren, erfüllen demnach beide dieselbe Differentialgleichung. Näheren Aufschluss über die Art der elektromagnetischen Wellen, die dieser Gleichung unterworfen sind, erhalten wir, wenn wir partikuläre Integrale der Differentialgleichung bilden.

Hier handelt es sich nur um den einfachsten Fall. Auf diesen wird man geführt, wenn man setzt

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (325)$$

wobei $\mathfrak{H}^0$ einen dem Raume und der Zeit nach constanten Vector, x den senkrechten Abstand des Aufpunktes von einer beliebig gewählten Ebene, t die Zeit und λ und τ zwei Constanten bedeuten. Dieser Werth bildet nämlich in der That ein Integral der Differentialgleichung (323), wenn man über die Constanten λ und τ in passender Weise verfügt. Man erhält nämlich, wenn die erwähnte Ebene zur YZ-Ebene genommen wird, aus Gleichung (325)

$$\nabla^2 \mathfrak{H} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial x^2} = - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \mathfrak{H}^0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right),$$

sowie

$$\frac{d^2 \mathfrak{H}}{dt^2} = - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \mathfrak{H}^0 \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right);$$

Gleichung (323) ist also erfüllt, wenn wir setzen

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\tau^2} \cdot K\mu \quad \text{oder} \quad \lambda = \tau \sqrt{\frac{1}{K\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad (326)$$

Bisher war über den constanten Vector $\mathfrak{H}^0$ nichts vorausgesetzt; einer einschränkenden Bedingung wird er aber dadurch unterworfen, dass $\mathfrak{H}$ zugleich Gleichung (320) erfüllen muss. Führt man die Operation div an Gleichung (325) aus und bezeichnet die X-Componente von $\mathfrak{H}^0$ mit H_1^0, so erhält man nach Gleichung (320)

$$\operatorname{div}\mathfrak{H} = H_1^0 \frac{\partial}{\partial x} \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right) = H_1^0 \frac{2\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right) = 0.$$

Da dies für jedes x und für jedes t zutrifft, muss

$$H_1^0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (327)$$

sein, d. h. $\mathfrak{H}^0$ muss parallel zur YZ-Ebene sein. Schreiben wir also

$$\mathfrak{H}^0 = \mathfrak{j} H_2^0 + \mathfrak{k} H_3^0,$$

so geht Gleichung (318) hiermit und nach Einsetzen des Werthes von $\mathfrak{H}$ aus Gleichung (325) über in

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = \frac{2\pi}{\lambda K}\left(-\mathfrak{j} H_3^0 + \mathfrak{k} H_2^0\right) \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right).$$

Durch Integration erhalten wir hieraus

$$\mathfrak{E} = \frac{\tau}{\lambda K}\left(-\mathfrak{j} H_3^0 + \mathfrak{k} H_2^0\right) \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right) + \mathfrak{K} \quad . \quad . \quad (328)$$

wobei die Integrationsconstante $\mathfrak{K}$ zunächst unabhängig von der Zeit ist. Setzt man den Werth von $\mathfrak{E}$ in Gleichung (324), so wird diese, wie man sich leicht überzeugt, erfüllt unter der Bedingung, dass $\nabla^2 \mathfrak{K}$ gleich Null ist. Auch Gleichung (319) wird durch die Lösungen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ befriedigt, falls curl $\mathfrak{K}$ Null ist. Diese beiden Bedingungen sprechen aus, dass $\mathfrak{K}$ zu einem der Zeit nach constanten elektrostatischen Felde gehört, das von Massen herrührt, die ausserhalb des von uns betrachteten Feldbezirks liegen. Ein solches constantes elektrostatisches Feld hat also gar keinen Einfluss auf die Wellenbewegung. Ebenso könnte der Lösung von $\mathfrak{H}$ irgend ein der Zeit nach constanter Vector zugefügt werden, der dieselben beiden Bedingungen erfüllt, ohne dass sich der Vorgang im

Uebrigen änderte. Magnete und elektrische Ladungen sind also auf die Fortpflanzung der ebenen magnetischen Wellen unter den hier vorliegenden Bedingungen ohne Einfluss. — Da es auf $\mathfrak{R}$ demnach nicht weiter ankommt, setzen wir es der Einfachheit halber gleich Null.

Die für $\mathfrak{E}$ gefundene Lösung sei symmetrisch zu Gleichung (325) in der Form geschrieben

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (329)$$

Unter $\mathfrak{E}^0$ ist demnach ein der Zeit und dem Raume nach constanter Vector zu verstehen, dessen Componenten sich aus dem Vergleiche mit Gleichung (328) ergeben zu

$$E_1^0 = 0, \quad E_2^0 = -\frac{\tau}{\lambda K} H_3^0, \quad E_0^3 = \frac{\tau}{\lambda K} H_2^0 \quad . \quad (330)$$

Der hierbei vorkommende Coefficient $\tau/\lambda K$ kann nach Gleichung (326) durch $\sqrt{\mu/K}$ ersetzt werden, hängt also nur von dem Medium ab.

Auch der Vector $\mathfrak{E}^0$ geht demnach parallel zur YZ-Ebene und zwar steht er senkrecht zum Vector $\mathfrak{H}^0$, da, wie man sofort erkennt, das scalare Product beider zu Null wird.

§ 143. Discussion der gefundenen Lösung.

Analytisch ist hiermit die Aufgabe, ein particuläres Integral der Differentialgleichung der elektrodynamischen Wellen zu bilden, vollständig gelöst; es handelt sich jetzt noch um die Besprechung der physikalischen Bedeutung dieser Lösung.

Nach den Gleichungen (325) und (329) haben wir es hier mit einem rein periodischen Vorgang zu thun. Zu einer gegebenen Zeit hat der Vector $\mathfrak{H}$ an allen Stellen des Feldes, die auf einer zur YZ-Ebene parallelen Ebene enthalten sind, dieselbe Grösse und Richtung. Der grösste Werth, den er annimmt ist $\mathfrak{H}^0$; dies trifft in einem Augenblicke zu, wo $x/\lambda + t/\tau$ für das betreffende x gleich $n + 1/4$ ist, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Während die Zeit weiter fortschreitet, nimmt $\mathfrak{H}$ ab; es wird zu Null, wenn $x/\lambda + t/\tau = n + 1/2$ ist und kehrt darauf die Richtung in die entgegengesetzte um. Man erkennt aus dieser Betrachtung, dass τ die Schwingungsdauer einer vollen Periode ist; denn sobald t sich um τ vermehrt, wächst n wieder um 1 an und der Vorgang beginnt von Neuem.

Anstatt wie soeben den Blick auf eine bestimmte Stelle des Feldes zu fesseln und die Veränderungen während des Verlaufes der Zeit an dieser Stelle zu beachten, wollen wir jetzt umgekehrt den Zustand des Feldes an verschiedenen Stellen zur gleichen Zeit ins Auge fassen. Auch dem Raume nach ist $\mathfrak{H}$ periodisch; es nimmt den Maximalwerth $\mathfrak{H}^0$ überall dort an, wo $x/\lambda + t/\tau = n + 1/4$ ist; wächst dieser Betrag auf $n + 3/4$ an, so ist $\mathfrak{H}$ ebenso gross, aber entgegengesetzt gerichtet. Hieraus erkennt man die Bedeutung der Constanten λ: diese gibt die Wellenlänge an, denn sobald wir in der Richtung x um λ weiter gehen, hat sich der Bogen, dessen sinus in Gleichung (325) vorkommt, um 2π vermehrt, wodurch an dem Werthe von $\mathfrak{H}$ und ebenso nach Gleichung (329) an dem von $\mathfrak{E}$ nichts geändert wird.

Man betrachte ferner die Aenderung von $\mathfrak{H}$, wenn man zur selben Zeit um das unendlich kleine Stück dx vorwärts geht und vergleiche sie mit der Aenderung, die $\mathfrak{H}$ an demselben Orte während der unendlich kleinen Zeit dt erfährt; man hat

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dx} \cdot dx = \mathfrak{H}^0 \frac{2\pi dx}{\lambda} \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right)$$

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dt} \cdot dt = \mathfrak{H}^0 \frac{2\pi dt}{\tau} \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right).$$

Beide Werthe sind einander gleich, falls zwischen dx und dt die Bedingung

$$dx/\lambda = dt/\tau$$

erfüllt ist. Aus dieser Betrachtung erkennt man zweierlei. Zunächst ist die von uns angenommene Richtung der x entgegengesetzt der Fortpflanzungsrichtung der Wellen, denn jener Zustand, der im Abstande $+dx$ zur Zeit t herrschte, tritt nach der Zeit $t+dt$ im Aufpunkte ein. Zugleich ergibt sich aber daraus noch die Geschwindigkeit, mit der dieser Zustand durch das Medium fortschreitet, also mit anderen Worten die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung. Nennen wir diese v, so muss, wenn dx und dt gleichen Aenderungen entsprechen sollen,

$$dx = v\,dt$$

sein. Vergleichen wir dies mit der vorher direct gefundenen Beziehung zwischen beiden und beachten zugleich Gleichung (326), so erhalten wir

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{K\mu}} \quad \ldots\ldots \quad 331)$$

Schon früher (§ 59), bei der Untersuchung über die Dimensionen der Coefficienten K und μ waren wir zu dem Resultate gelangt, dass ihr Product das Reciproke vom Quadrate einer Geschwindigkeit darstelle. Jetzt ist jene Betrachtung dahin ergänzt, dass diese Geschwindigkeit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen (oder auch die des Lichtes, das nach Maxwell als eine elektromagnetische Wellenerscheinung betrachtet wird) in dem betreffenden Medium ist.

Will man die x in der Richtung der fortschreitenden Wellen zählen, so ist Gleichung (325) zu ersetzen durch

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0 \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

und entsprechend bei $\mathfrak{E}$.

Der Inhalt an magnetischer und elektrostatischer Energie in einem Volumenelemente dv ist für einen gegebenen Augenblick (Gl. 116 und Gl. 129)

$$dT = \frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2 dv + \frac{K}{8\pi}\mathfrak{E}^2 dv.$$

Setzt man die Werthe von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ ein und nimmt dabei auf die durch die Gleichung (330) gegebenen Werthe der Componenten von $\mathfrak{E}^0$ Rücksicht, so ergibt sich nach einfacher Ausrechnung, dass beide Glieder von dT von gleicher Grösse sind, dass also die elektrostatische Energie im Volumenelemente in jedem Augenblicke ebenso gross ist als die magnetische.

Die Fortpflanzungsrichtung der Welle kann zugleich als die Bahn eines Energiestromes aufgefasst werden. Durch einen der Flächeneinheit gleichen senkrechten Querschnitt wandert in der Schwingungsdauer τ so viel Energie, als bei demselben Querschnitt über eine Längenwelle hinweg in jedem Augenblicke im Medium verbreitet ist. Dies ist der Betrag

$$\frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}_0^2\int_0^\lambda \sin^2 2\pi\left(\frac{t}{\tau}+\frac{x}{\lambda}\right)dx,$$

wofür man durch Ausführung der Integration leicht erhält

$$\frac{\mu}{4\pi}\mathfrak{H}_0^2\cdot\frac{\lambda}{2}.$$

Die mittlere Intensität des Energiestromes ergibt sich hieraus sofort durch Division mit τ.

Eine ähnliche Betrachtung liefert leicht auch die augenblickliche Intensität des Energiestromes. Von besonderem Interesse ist es, hier an die Untersuchungen in § 112 über den Poynting'schen Energiefluss anzuknüpfen. Setzen wir die Integrationsconstante curl $\mathfrak{R}$ in Gleichung (267) gleich Null, so entnehmen wir daraus in unserem Falle für den Energiestrom $\mathfrak{W}$

$$\mathfrak{W}=\frac{1}{4\pi}\mathrm{V}\,\mathfrak{E}\mathfrak{H}=\frac{1}{4\pi}\sin^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{V}\,\mathfrak{E}_0\mathfrak{H}_0.$$

Für $\mathrm{V}\,\mathfrak{E}_0\mathfrak{H}_0$ erhält man aber mit Berücksichtigung der Gleichungen (330) und (327)

$$\mathrm{V}\,\mathfrak{E}_0\mathfrak{H}_0=-\mathfrak{i}\frac{\tau}{\lambda K}\left((H_3^0)^2+(H_2^0)^2\right)=-\mathfrak{i}\frac{\tau}{\lambda K}\cdot\mathfrak{H}_0^2.$$

Demnach wird $\mathfrak{W}$

$$\mathfrak{W}=-\mathfrak{i}\frac{\tau}{\lambda K}\cdot\frac{1}{4\pi}\sin^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{\tau}\right)\cdot\mathfrak{H}_0^2 \quad . \quad . \quad (332)$$

Dieser Werth deckt sich vollständig mit dem durch die vorhergehende Betrachtung gefundenen; speciell wird man auch genau auf den vorher gegebenen Mittelwerth von $\mathfrak{W}$ geführt, wenn man Gleichung (332) über eine Schwingungsdauer integrirt und dann durch τ dividirt. Man muss beim Vergleiche nur auf die durch Gleichung (326) ausgesprochene Beziehung zwischen den Constanten achten.

Dieser Vergleich lehrt uns, dass im vorliegenden Falle die von Poynting vorgenommene Unterdrückung der Integrationsconstanten $\mathfrak{A}$ in Gleichung (267) in der That vollständig gerechtfertigt ist.

Das negative Vorzeichen des Ausdruckes von $\mathfrak{W}$ in Gleichung (332) weist uns darauf hin, dass die Richtung der Energiefortpflanzung der $\mathfrak{i}$-Richtung (also der Richtung der positiven x) entgegengesetzt ist. In Verbindung mit einem schon vorher über die x-Richtung gefundenen Resultate heisst dies, dass sich die Energie in derselben Richtung fortpflanzt, wie die Wellen selbst. Im Sinne der elektromagnetischen Lichttheorie wird daher die Richtung eines Lichtstrahles durch die Richtung des damit verbundenen Energieflusses bestimmt.

Ein Strahl, der die hier besprochenen Gesetze befolgt, bei dem also die Richtung von $\mathfrak{H}$ stets in dieselbe Gerade und die von $\mathfrak{E}$ stets in eine dazu senkrechte Gerade fällt, heisst ein planpolarisirter Strahl. Ob $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{B}$ in jene Ebene fällt, die man in der Optik die Polarisationsebene eines eben polarisirten Lichtstrahles nennt, ist noch zweifelhaft.

§ 144. Ebene Wellen in Halbleitern.

Wenn das Medium, in dem sich eine elektromagnetische Welle fortpflanzt, zugleich (wir wollen jetzt annehmen nur in geringem Grade) elektrisch leitet, hat man die Hauptgleichungen an Stelle von (318) und (319) zu schreiben (vgl. Gl. 154 und 163)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi k \mathfrak{E} + K \frac{d\mathfrak{E}}{dt}$$

$$\operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt},$$

wozu noch die Gleichungen (320) und (321) treten.

Durch Elimination entweder von $\mathfrak{E}$ oder von $\mathfrak{H}$ in derselben Weise wie in § 142 erhalten wir die für diese beiden Vectoren gültigen Differentialgleichungen, die hier an Stelle der früheren Gleichungen (323) und (324) treten. Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \mathfrak{H} &= 4\pi k \mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt} + \mu K \frac{d^2\mathfrak{H}}{dt^2} \\ \nabla^2 \mathfrak{E} &= 4\pi k \mu \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \mu K \frac{d^2\mathfrak{E}}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (333)$$

Jeder Vector erfüllt dieselbe Differentialgleichung. Setzt man an Stelle von Gleichung (325)

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 e^{\alpha x} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right),$$

so hat man eine particuläre Lösung der Differentialgleichung für $\mathfrak{H}$, die sich von der früher betrachteten Lösung für den Fall $k = 0$ nur durch das Hinzutreten des Factors $e^{\alpha x}$ unterscheidet. Dieser Factor spricht aus, dass eine Dämpfung der Ausschläge beim Fortschreiten der Wellen stattfindet. Die Lösung bleibt natürlich auch noch gültig, wenn man den sin durch den cos ersetzt.

Eine wesentliche Abweichung gegenüber dem früher betrachteten einfacheren Falle stellt sich hier insofern ein, als der correspondirende Werth von $\mathfrak{E}$

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^0 e^{\alpha x} \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right)$$

nun nicht mehr, wie man nach den früheren Ergebnissen vermuthen möchte, mit $\mathfrak{H}$ zusammen eine Lösung des Problems bildet. Die Differentialgleichungen (333) werden zwar beide erfüllt; aber nicht mehr die beiden Hauptgleichungen selbst, wenn man die gewählten Werthe einsetzt. Man setze daher

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \mathfrak{H}^0 e^{\alpha x}\left\{\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{\tau}\right)+\beta\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{\tau}\right)\right\}\\ \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}^0 e^{\alpha x}\left\{\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{\tau}\right)+\gamma\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{\tau}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \quad (334)$$

Hierbei sind β und γ zwei neueingeführte Constanten, die man als Tangenten von Winkeln betrachten kann. Diese Winkel sind die „Phasenverschiebungswinkel“ der Lösungen (334) gegenüber den früher betrachteten und da β von γ nothwendig verschieden sein muss, damit die Hauptgleichungen erfüllt werden, ergibt sich aus dieser Betrachtung, dass $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ in absorbirenden Mitteln nicht mehr in gleicher Phase stehen.

Das Hinzukommen der mit β und γ behafteten Glieder in Gleichung (334) stört nicht, dass die Differentialgleichungen (333) immer noch erfüllt werden; wir haben nur etwas verallgemeinerte Lösungen dieser Differentialgleichungen herangezogen. Setzen wir die Werthe (334) in die Gleichungen (333) ein, so erhalten wir zwei Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten α, λ und τ, in denen sich β und γ völlig herausheben. Setzen wir hierauf die Werthe (334) in die Hauptgleichungen ein, so erhalten wir zwei Bedingungsgleichungen, aus denen sich β und γ (als Lösungen von Gleichungen dritten Grades) berechnen lassen. Da diese Lösung etwas verwickelt ist, möge darauf jetzt nicht weiter eingegangen werden.

Die beiden Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten α, λ und τ, denen diese genügen müssen, damit die Differentialgleichungen (333) erfüllt werden, ergeben sich leicht wie folgt

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + K\mu\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = 0\\ 2\alpha\tau = 4\pi k\mu\lambda\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (335)$$

Eine dieser Constanten kann demnach beliebig gewählt werden, z. B. λ oder τ. Die anderen und daher auch das Verhältniss λ/τ, das nach der Betrachtung, die zu Gleichung (331) führte, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung angibt, sind von der getroffenen Wahl abhängig, d. h. in absorbirenden Mitteln ist diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Function der Wellenlänge. Dieses Resultat ist namentlich desshalb bemerkenswerth, weil man in der Optik die Dispersion der Lichtstrahlen durch Differenzen in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit verschieden langer Wellen erklärt.

Die Auflösung der Gleichungen (335) liefert, wenn man λ als die beliebig zu wählende Constante ansieht und beachtet, dass α nach der von uns getroffenen Festsetzung der Vorzeichen (die es mit sich bringt, dass die Fortpflanzungsrichtung der Wellen mit der negativen X-Achse zusammenfällt) jedenfalls positiv ist:

$$\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 + \frac{K}{\mu k^2}}} = \frac{2\pi\mu k}{\sqrt{\lambda^2\mu^2k^2 + K\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad (336)$$

Die Absorption macht sich also um so weniger bemerklich (α ist um so kleiner) je grösser die Wellenlänge λ ist. Daher kommt es, dass dicke Platten aus Holz, Pech u. s. f. die Hertzschen Wellen ohne starke Absorption durchlassen, während die viel kürzeren Lichtwellen vollständig darin verlöschen.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $v = \lambda/\tau$ erhält man aus der zweiten der Gleichungen (335)

$$v = \frac{\alpha}{2\pi k\mu} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2\mu^2k^2 + K\mu}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (337)$$

Falls entweder k selbst schon sehr klein oder falls λ so klein ist, dass das Glied $\lambda^2\mu^2k^2$ gegen $K\mu$ verschwindet, geht v wieder in den früher (Gl. 331) gefundenen Werth über.

Schlussbemerkungen.

Aus den früher angeführten Gründen gehe ich hier nicht weiter auf die Theorie der elektromagnetischen Wellen ein. Ich bemerke nur noch, dass man aus der verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeit in zwei aneinander grenzenden Medien auf die Lichtbrechung zwischen ihnen schliessen kann. Maxwell benutzte zu dem Vergleiche des Brechungsindex mit der Dielektricitätsconstanten Gleichung (331), die in vielen Fällen zu einer befriedigenden Uebereinstimmung führt. Im Allgemeinen wäre sie indessen durch Gleichung (337) zu ersetzen; doch ist mit Rücksicht auf den molekularen Aufbau der lichtbrechenden Körper auch hier keine volle Uebereinstimmung zu erwarten. — Für weitergehende Untersuchungen ist es auch unerlässlich, die Theorie auf äolotrope Körper auszudehnen, wovon der Einfachheit halber in diesem Buche überall grundsätzlich abgesehen wurde.

In guten Leitern erlangen die den ersten Differentialquotienten nach t enthaltenden Glieder in den Differentialgleichungen (333) das Uebergewicht über die mit dem zweiten Differentialquotienten behafteten. Die Fortpflanzung der Störung erfolgt dann wie die Ausbreitung der Wärme nach der Fourier'schen Theorie Ein vollkommener Leiter ($k = \infty$) würde überhaupt keine Störung in sein Inneres dringen lassen.

Anhang.

I. Rückblick auf die Fassung der Elektrostatik.

Man kann oft genug die Aeusserung hören, dass die Elektrostatik das schwierigste Kapitel der Maxwell'schen Theorie bilde. Bei der Abfassung dieser Schrift habe ich aber eine solche Schwierigkeit kaum empfunden, und es will mir daher scheinen, dass sie überhaupt nicht in der Sache, sondern nur in unserer Gewohnheit, mit den Begriffen und Vorstellungen der Fernwirkungstheorie zu operiren, ihren Ursprung hat. Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, wird es sich empfehlen, hier noch einmal eine kurze Analyse des ganzen Gedankengangs zu geben, wobei sich mir auch Gelegenheit bieten wird, noch einige weitere Bemerkungen dem Früheren beizufügen.

Der erste Schritt bestand in der Einführung des Vectors $\mathfrak{E}$ (der elektrischen Kraft) im Dielektricum. In der Luft oder in flüssigen Nichtleitern ist das Kraftfeld $\mathfrak{E}$ unmittelbar durch die Erfahrung gegeben; aber auch die Uebertragung der Vorstellung vom Kraftfelde auf feste Dielektrica ist ein so unbedenklicher Schritt, dass er bisher wohl von Niemand beanstandet wurde. Dass zur Einführung von $\mathfrak{E}$ die vorhergehende Definition der Elektricitätsmenge (wie in der Fernwirkungslehre) keineswegs erforderlich ist, scheint mir fast selbstverständlich zu sein, da es zunächst nicht auf ein Messen von $\mathfrak{E}$ in absolutem Maasse ankommt. Für den Anfang genügt irgend eine willkürliche Einheit; später ergibt sich dann aus den Betrachtungen über die Energie des Feldes von selbst das Mittel zur Zurückführung auf absolutes Maass. Einen ausführlichen Nachweis für die Berechtigung dieses Vorgehens hat Vaschy kürzlich gegeben (C. R. 116. p. 1286. 1893). Bei der Abfassung des Textes würde ich diese Darstellung gern mit benutzt haben, wenn sie mir damals schon bekannt gewesen wäre.

Der Vector $\mathfrak{D}$ wird freilich rein hypothetisch eingeführt. Seine Einreihung bildet das wichtigste Merkmal der ganzen Maxwell'schen Theorie, durch das sich diese von allen früheren Theorien am wesentlichsten unterscheidet. Durch die Bemerkung, dass die Energiegrössen auch sonst überall durch zwei Factoren bestimmt werden, kann nachträglich bis zu einem gewissen Grade die physikalische Existenz von $\mathfrak{D}$ wahrscheinlich gemacht werden. Wirklich gerechtfertigt wird die Annahme aber nur durch den engen Anschluss der daraus gezogenen Folgerungen an die Erfahrungsthatsachen. Wenn aber auch unbedingt zuzugeben ist, dass die Annahme, der physikalische Zustand eines elektrostatischen Feldes erfordere zu seiner vollständigen Charakterisirung stets zwei Vectoren, ganz hypothetisch ist und ihre Rechtfertigung erst a posteriori erhalten kann, so ist doch andererseits auch keine Erschwerung der Vorstellungen darin zu erblicken. Denn der zwischen den Kräften und den elastischen Formänderungen der gewöhnlichen Mechanik bestehende Zusammenhang bildet ein so getreues Analogon dazu, dass wir niemals im Zweifel über den Sinn bleiben können, in dem die beiden Vectoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ neben einander gebraucht werden.

Die heute gebräuchliche Definition des Leiters (§ 43) gestattet eine einfache Uebertragung der beim Dielektricum gewonnenen Begriffe. Dass in einem elektrisch durchströmten Leiter ein elektrostatischer Zwangszustand besteht von derselben Art wie im Dielektricum, ist zwar experimentell bisher nicht in directer Weise bewiesen. Die damit zusammenhängende Definition des Leiters scheint mir aber darum nicht minder berechtigt, als die von der Fernwirkungslehre gegebene, wonach ein Leiter ein Körper sein soll, in dem sich die Elektricität frei zu verschieben vermag. Denn auch dass sich irgend etwas wirklich frei im Leiter verschiebe, ist nicht experimentell bewiesen; es ist dies nur eine Vorstellung, die uns zu den experimentell beobachteten Thatsachen eine mögliche Erklärung liefert. Dasselbe leistet aber auch die moderne Definition des Leiters. Hierbei ist noch darauf hinzuweisen, dass es in der Natur keine scharfe Grenze zwischen Leitern und Nichtleitern gibt. Sobald wir aber einen continuirlichen Uebergang annehmen, also so etwa, dass ein Körper bei einer bestimmten Temperatur nicht leitet und bei einer anderen (wie z. B. Glas bei einer Erwärmung) leitet, die Leitungsfähigkeit also eine stetige Function der Temperatur bildet (die von einer bestimmten Grenze an Null ergibt), folgt daraus sofort, dass unsere Vorstellung über den im elektrisch durchströmten Leiter bestehenden elektrostatischen Zwangszustand richtig sein muss, falls dies für das Dielektricum zugegeben wird.

Zunächst fehlt hierbei allerdings ein Mittel, um die Intensität der Vectoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ im Innern eines Leiters auszumessen. Das traf aber für einen festen Nichtleiter gleichfalls zu, und wie bei diesem das der Beobachtung zugängliche Maass der aufgehäuften Energie, so gibt bei dem Leiter die Beobachtung der in ihm in Wärme verwandelten elektrostatischen Energie das Mittel an die Hand, die Grösse der Vectoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ nachträglich zu bestimmen, wobei wie im vorigen Falle die Eigenschaften des Mediums mit in Betracht kommen. In einem elektrischen Felde, das frei von magnetischen Strömen ist, kommt hierzu der aus den späteren Erörterungen folgende Umstand, dass das Linienintegral der elektrischen Kraft für eine geschlossene Curve verschwindet, wodurch wir das Messen von $\mathfrak{E}$ im Metall durch ein Messen im angrenzenden Luftraume ersetzen können.

Der nächste Schritt besteht in der Zerlegung des Vectors $\mathfrak{E}$ (falls dieser in beliebiger Weise im Raum vertheilt ist), in zwei Componenten, wovon die eine wirbelfrei und die zweite solenoidal ist. (Vergl. hierzu auch Anhang II.) Diese Zerlegung bildet eine rein analytische Operation. Dann wird durch Definition festgesetzt, dass die Elektrostatik die Lehre von den elektrischen Feldern bildet, in denen $\mathfrak{E}$ der Zeit nach constant und dem Orte nach wirbelfrei vertheilt ist. Dafür, dass es solche Felder gibt und dass sie bei den Erscheinungen der Reibungselektricität vorkommen, kann auf die Erfahrung verwiesen werden. Die Eigenschaft der in diesem Falle wirbelfreien Vertheilung lässt sich indessen auch schon aus dem Energieprincip schliessen. — Im Innern der Leiter muss in elektrostatischen Feldern $\mathfrak{E}$ überall Null sein. Träfe dies nämlich nicht zu, so hätten wir einen stationären elektrischen Strom, der nur längs geschlossener Bahnen möglich ist. Das Linienintegral von $\mathfrak{E}$ für eine solche geschlossene Strombahn müsste aber dann nothwendig von Null verschieden sein (da $\mathfrak{E}$ mit dem Strome überall gleiche Richtung hat), was gegen die Voraussetzung der wirbelfreien Vertheilung ist.

Für ein wirbelfreies $\mathfrak{E}$ gelten ferner die Sätze der Potentialtheorie. Man gelangt damit auch zu jenen Werthen, die man in Anlehnung an die Newton'sche Gravitationstheorie als „Massen" bezeichnet, ohne dass indessen irgend eine Veranlassung zu der Annahme vorläge, dass diese elektrischen Massen in dem Sinne eine materielle Unterlage hätten, dass sie mit den ponderablen Massen der Mechanik verglichen werden könnten. Namentlich erscheint die Anwendbarkeit der Sätze der Mechanik auf die an solchen „Massen" angreifenden ponderomotorischen Kräfte zunächst ganz zweifelhaft. Die Massen spielen dagegen in der Maxwell'schen Theorie eine andere sehr wichtige und unmittelbar evidente Rolle, nämlich als Quellen und Versickerungsstellen des ihnen zugeordneten Kraftflusses. Wie zu $\mathfrak{E}$ die „freien", so gehören zu $\mathfrak{D}$ die „wahren" Elektricitätsmengen, zwischen denen sorgfältig zu unterscheiden das Bestreben jedes Physikers sein sollte. Die Gegenüberstellung der beiden Begriffe verhindert zugleich, dass einem von ihnen je wieder eine solche dominirende Rolle zugeschrieben werden könnte, wie den elektrischen Massen der älteren Theorie; damit wird zugleich die grob-materialistische Auffassung der

Elektricität, zu der die ältere Theorie geradezu herausforderte, mehr in den Hintergrund gedrängt.

Nachdem der Boden soweit vorbereitet ist, folgt in § 44 die Betrachtung über das Zustandekommen und die Vertheilung der Elektricitätsmengen in einem geladenen Leiter. Um hierüber eine klare Vorstellung zu gewinnen, müssen wir ein mechanisches System angeben können, das in seinem Verhalten mit dem elektrischen Systeme, um das es sich handelt, eng verglichen werden kann.

Dazu genügt es, an den schon von vornherein benutzten Vergleich der elektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ mit einer elastischen Verschiebung wieder anzuknüpfen. So lange wir nur Nichtleiter haben, kann nirgends eine wahre Ladung auftreten. An der Grenzfläche der Leiter besteht im ersten Augenblicke, nachdem eine Polarisirung des ganzen Gebietes erfolgte, ebenfalls noch keine wahre Ladung: sie bildet sich erst im Verlaufe einer gewissen (wenn auch sehr kurzen) Zeit aus, indem der elektrostatische Zwang im Leiter allmählich erlischt, während er im Nichtleiter nur durch ein Rückgängigmachen der elastischen Verschiebung aufgehoben werden könnte.

Warum ist nun mit dem Erlöschen des elektrostatischen Zwanges im Leiter nicht auch ein Zurückgehen der elastischen Verschiebung im angrenzenden Nichtleiter verbunden; wodurch wird der — nach unserem Bilde — aus dem Leiter in den Nichtleiter unter Ueberwindung eines elastischen Widerstandes verdrängte Aether verhindert, in den Leiter zurückzutreten, nachdem der elektrostatische Zwang im Leiter aufhörte? Die Antwort darauf ist leicht zu geben: der Aether unseres Bildes ist incompressibel. Wer mit dieser Antwort nicht zufrieden ist, wird weiter schliessen, dass eine Art hydrostatischen Druckes (bezw. Zuges) im Aether auftreten müsse, um den Zwang an der Leitergrenzfläche aufrecht zu erhalten. In der That ist ja in dem Begriffe der Unzusammendrückbarkeit schon der vom Auftreten eines Widerstandes gegen jede Volumenänderung mit enthalten. Hier mag man es nun vermissen, dass die Theorie von den Folgen des Auftretens eines solchen Druckes gar nicht weiter Notiz nimmt. Indessen, wenn der Aether vollkommen incompressibel ist, können durch diese Druckkräfte keine Longitudinalwellen (bezw. nur solche mit unendlich grosser Fortpflanzungsgeschwindigkeit) hervorgebracht werden. In jedem Augenblicke regeln sich, unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der eine Aenderung des Zustandes erfolgt, an allen Stellen des Feldes die Verhältnisse so, dass die solenoidale Bedingung für den wahren Strom überall streng erfüllt ist. Hierin besteht die einzige physikalische Aufgabe jenes Druckes (oder Zuges) und auch die alleinige physikalische Wirkung, die er auszuüben vermag. Wir tragen ihm daher schon vollständig Rechnung, wenn wir, ohne weiter von ihm zu reden, überall von der genannten Bedingung Gebrauch machen.

Die mechanische Erläuterung des Vorganges lässt daher kaum etwas zu wünschen übrig. Sie gestattet uns, eine deutliche Vorstellung von den Bedingungen zu gewinnen, unter denen die elektrischen Ladungen zu Stande kommen, die in engster Uebereinstimmung mit den Erfahrungsthatsachen steht. Das ist aber zugleich Alles, was wir von dem gebrauchten Vergleiche erwarten können und erwarten dürfen. Bei dem gegenwärtigen Stande unseres Wissens müssen wir uns damit zufrieden geben, wenn wir irgend ein mechanisches System angeben können, das uns ein übersichtliches Erfassen und Begreifen des Herganges bei der elektrischen Ladung in Uebereinstimmung mit den Grundlagen der ganzen übrigen Theorie gestattet. Die Möglichkeit anderer Erklärungsweisen ist ausdrücklich offen zu lassen und die Aufgabe, alle Vorstellungen, die dasselbe leisten, aufzusuchen und die stichhaltigste unter ihnen auszuwählen, der zukünftigen Entwickelung der Wissenschaft anheimzugeben.

Genau dieselbe Betrachtung bleibt dann ferner auch auf den Magnetismus anwendbar.

II. Zerlegung eines beliebig im Raume vertheilten Vectors in einen wirbelfreien und einen solenoidalen Bestandtheil.

Von einer solchen Zerlegung ist in diesem Buche oft genug Gebrauch gemacht worden; es mag daher am Platze sein, hier noch einmal etwas näher darauf einzugehen. Unter $\mathfrak{R}$ sei ein stetig, aber sonst beliebig im Raume vertheilter Vector verstanden, d. h. zu jedem Punkte des Raumes gehöre ein bekannter Werth von $\mathfrak{R}$ und in Nachbarpunkten sei $\mathfrak{R}$ nur unendlich wenig verschieden. Verlangt wird, $\mathfrak{R}$ an jeder Stelle in zwei Componenten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ zu zerlegen, so dass $\mathfrak{X}$ eine wirbelfreie und $\mathfrak{Y}$ eine solenoidale Vertheilung im Raume besitzt.

In Gleichungen ausgesprochen heisst dies

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{Y} = \mathfrak{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha)$$

$$\operatorname{curl} \mathfrak{X} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{Y} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta)$$

Um diese Gleichungen nach den Unbekannten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ aufzulösen, beachte man, dass $\mathfrak{X}$ nach der ihm auferlegten Bedingung von einem scalaren Potentiale V und $\mathfrak{Y}$ von einem Vectorpotentiale $\mathfrak{A}$ abgeleitet werden kann, so dass (§ 36 u. 86)

$$\mathfrak{X} = -\nabla V, \quad \mathfrak{Y} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

ist. Die beiden neuen Unbekannten V und $\mathfrak{A}$ lassen sich aber leicht ermitteln. Man nehme von Gleichung (α) die div, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung (β) und der Definitionsgleichung für V

$$\operatorname{div} \mathfrak{X} = -\operatorname{div} \nabla V = -\nabla^2 V = \operatorname{div} \mathfrak{R}.$$

Damit erhalten wir die Laplace'sche Gleichung für das gesuchte scalare Potential V, deren Lösung nach Gleichung (111) S. 86

$$V = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{R}}{r} dv$$

ist. Auf dieselbe Weise erhält man auch $\mathfrak{A}$; nach Gleichung (α), mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichung für $\mathfrak{X}$ und der Definitionsgleichung von $\mathfrak{A}$ wird nämlich

$$\operatorname{curl} \mathfrak{Y} = \operatorname{curl}^2 \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \mathfrak{R}.$$

Setzen wir fest (da in dieser Hinsicht der Willkür in Bezug auf die Hilfsgrösse $\mathfrak{A}$ Spielraum gelassen ist), dass div $\mathfrak{A}$ verschwinden soll, so ist nach Gleichung (72) S. 59

$$\operatorname{curl}^2 \mathfrak{A} = -\nabla^2 \mathfrak{A}$$

und die vorhergehende Gleichung liefert die Laplace'sche Gleichung

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = -\operatorname{curl} \mathfrak{R},$$

deren Lösung nach §§ 84 und 83

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\operatorname{curl} \mathfrak{R}}{r}\, dv$$

lautet. Unsere Aufgabe ist hiermit vollständig gelöst. Denn setzen wir

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int\frac{\operatorname{div}\mathfrak{R}}{r}\,dv + \frac{1}{4\pi}\operatorname{curl}\int\frac{\operatorname{curl}\mathfrak{R}}{r}\,dv,$$

so ist diese Gleichung zunächst identisch erfüllt, wie man mit Hülfe von Gleichung (72) und der Laplace'schen Gleichung erkennt und zugleich ist der erste der Bestandtheile, in die $\mathfrak{R}$ dadurch zerlegt wird, wirbelfrei und der andere solenoidal vertheilt, wie es verlangt war. — Dass die Grösse $\mathfrak{A}$ die ihr in der vorhergehenden Betrachtung auferlegte Bedingung div $\mathfrak{A} = 0$ nach ihrer Ermittelung auch wirklich erfüllt, folgt sofort aus § 85.

Bedeutet $\mathfrak{R}$ einen beliebig gegebenen elektrischen Verschiebungsfluss, wie $\mathfrak{D}$ in § 41, so stellt das erste Glied des für $\mathfrak{R}$ gegebenen Ausdruckes jenen Theil des Verschiebungsflusses dar, der von wahren elektrischen Massen ausgeht. In § 40 wurde bewiesen, dass auch in rein elektrostatischen Feldern, falls nicht K überall constant ist, neben jenem auch noch geschlossene Verschiebungslinien auftreten. Setzt man den Werth von curl $\mathfrak{D}$ auf S. 96 in die oben abgeleitete Formel ein, so erhält man für den in § 41 mit $\mathfrak{D}''$ bezeichneten Antheil von $\mathfrak{D}$

$$\mathfrak{D}'' = \frac{1}{(4\pi)^2}\cdot\operatorname{curl}\int\frac{\mathrm{V}(\nabla K)\cdot\mathfrak{E}}{r}\,dv,$$

was sich nach Gleichung (204) S. 235 und Gleichung (84) S. 64 auch noch weiter ausführen lässt.

Um ein Missverständniss zu vermeiden, das, wie ich nachträglich bemerke, ziemlich nahe liegt, erwähne ich noch, dass der Ausspruch am Schlusse von § 40 natürlich nicht so zu verstehen ist, als wenn die geschlossenen Verschiebungslinien von elektrostatischen Feldern ihrem ganzen Verlaufe nach in die Uebergangsschichten fielen. Der Satz bezieht sich vielmehr nur darauf, dass die geschlossenen Verschiebungslinien sich innerhalb der Uebergangsschicht schliessen, dass also innerhalb eines Gebietstheiles, in dem K constant ist, keine in sich zurückkehrenden Verschiebungslinien vorkommen.

III. Anziehung einer Kupferscheibe durch die Polfläche eines alternirenden Elektromagneten.

Eine Kupferscheibe oder ein Drahtring wird von der Polfläche eines alternirenden Elektromagneten im Allgemeinen abgestossen. Schon in §§ 124 u. 128 ist diese Erscheinung erwähnt und dahin gedeutet worden, dass sich der geschlossene Leiter stets so einzustellen sucht, um den durch die umschlossene Fläche gehenden magnetischen Wechselstrom möglichst klein zu machen. Unter besonderen Umständen wird die Wirkung aber in ihr Gegentheil verkehrt, nämlich dann, wenn die Kupferscheibe einen merklich kleineren Durchmesser hat als die Polfläche des Magnetkerns und ihr in geringem Abstande gegenüber gestellt wird. Die Scheibe wird dann angezogen und haftet ziemlich fest an der Polfläche. Eine Beschreibung des Versuchs findet man z. B. in der Elektrotechnischen Zeitschrift, Bd. 14, S. 238, 1893. Auch die Erklärung, die der Entdecker dieses Phänomens, Elihu Thomson, dafür gegeben hat, wird dort auseinandergesetzt; ich vermuthe indessen, dass der Leser von dieser Erklärung ebensowenig befriedigt sein wird, als ich selbst.

Es möge mir daher der Hinweis gestattet sein, dass sich die Anziehung im vorliegenden Falle ganz einfach aus demselben Grunde erklärt, wie vorher die Abstossung. Wenn die Kupferscheibe auf der Mitte der Polfläche haftet, wird sie von einem geringeren magnetischen Wechselstrome durchsetzt, als wenn sie um ein nicht zu grosses Stück von der Polfläche entfernt ist. Das Eisen ist nämlich nicht absolut magnetisch weich; die inneren Schichten stehen daher unter dem Einflusse der Schirmwirkung der äusseren und werden dementsprechend schwächer magnetisirt. Beim Uebertritt des Inductionsflusses in die Luft an den Polflächen gleichen sich diese Unterschiede dagegen aus. — Haftet die Scheibe auf der Polfläche, so bewirkt der in ihr inducirte elektrische Wechselstrom eine Verdrängung der Inductionslinien nach den peripherischen Schichten des Magnetkerns und er wird dabei durch die Schirmwirkung dieser Schichten unmittelbar unterstützt. Die Scheibe wird daher nur von einem verhältnissmässig geringen magnetischen Wechselstrome durchsetzt. Aehnlich vollzieht sich zwar der Vorgang auch noch, wenn die Scheibe in kleinem Abstande vor der Polfläche steht; hier kann sich aber der Einfluss der Schirmwirkung der äusseren Schichten des Magnetkerns nicht mehr in demselben Maasse geltend machen. Der schliesslich noch durch die Scheibe gehende magnetische Wechselstrom wird daher grösser als im vorigen Falle und die Scheibe sucht in die vorige Lage zurückzukehren.

Auf eine ausführliche mathematische Analyse des ganzen Vorganges möchte ich jetzt nicht eingehen. Zur besseren Erläuterung der vorhergehenden Ausführungen bemerke ich indessen noch, dass auch in unmittelbarer Nähe der Polfläche eines mit Gleichstrom erregten stabförmigen Elektromagneten die Induction $\mathfrak{B}$ auf Punkten, die in der Magnetachse liegen, anwachsen muss, wenn wir uns von der Polfläche entfernen. Wäre das Eisen absolut weich, so müsste $\mathfrak{B}$ zwar abnehmen, wenn wir von der Polfläche abrücken, wegen der Ausbreitung des Inductionsflusses über einen grösseren Querschnitt. An den Randschichten trifft dies auch thatsächlich zu. Wenn der Kern aber von merklicher Härte ist, ändert sich dies an den centralen Theilen der Polfläche dadurch, dass beim Uebergang in die Luft der Inductionsfluss eine wirbelfreie Vertheilung annimmt, die er im Eisen nicht hatte. Es wird daher eine Ablenkung der Inductionslinien der äusseren Schichten zunächst theilweise auch nach der Mitte hin stattfinden, ehe bei grösserer Entfernung von der Polfläche auch hier eine Ausbreitung nach aussen hin erfolgt, womit dann wieder eine Abnahme von $\mathfrak{B}$ verbunden ist. — An der Stelle, wo diese Umkehrung eintritt, ist das Kupferscheibchen des E. Thomson'schen Versuchs im labilen Gleichgewichte.

Diese ganze Betrachtung beruht nur auf einer einzigen Voraussetzung, an deren Berechtigung man etwa zweifeln könnte; nämlich auf der von mir in diesem Buche vertretenen Anschauung über die durch die magnetische Härte des Eisens bedingten Erscheinungen. Ich glaube indessen, dass man sich der Erkenntniss nicht verschliessen wird, dass diese Anschauung aus den experimentellen Daten über die magnetische Härte, mit denen sich die Fernwirkungstheorie in keiner Weise befriedigend abzufinden wusste, mit Nothwendigkeit folgt, dass es sich hier in der That gar nicht um eine Hypothese sondern nur um die correcte Formulirung der thatsächlichen Beobachtungen handelt.

In dem hier erörterten Verhalten des Kupferscheibchens in dem E. Thomson'schen Versuche glaube ich eine unmittelbare Bestätigung dieser Anschauung erblicken zu dürfen.

IV. Formelzusammenstellung.

A. Allgemeine Gesetze für das Rechnen mit Vectorgrössen.

α) Bezeichnungen.

Alle Vectoren sind durch Fracturbuchstaben kenntlich gemacht, wie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{a}$ u. s. f.; die zugehörigen Tensoren sind mit A, B, a, die Componenten in den Richtungen der drei Grundvectoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ mit A_1 A_2 A_3 u. s. f. bezeichnet. Das scalare Product wird $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, das Vectorproduct $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ geschrieben:

β) Elementare Operationen.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = AB\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 7, S. 12)}$$

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = -V\mathfrak{B}\mathfrak{A} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 14, S. 16)}$$

$$\begin{aligned} &V(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})(\mathfrak{C}+\mathfrak{D}) \\ &= V\mathfrak{A}\mathfrak{C} + V\mathfrak{A}\mathfrak{D} + V\mathfrak{B}\mathfrak{C} + V\mathfrak{B}\mathfrak{D} \quad . \quad \text{(Gl. 16, S. 17)} \end{aligned}$$

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 18}^{\text{a}}\text{, S. 18)}$$

Der Tensor von $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist gleich $AB\sin\varepsilon$ (Gl. 13, S. 15)

$$\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}V\mathfrak{C}\mathfrak{A} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 21, S. 25)}$$

Jedes dieser 3 Producte gibt den Inhalt des aus den Kanten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gebildeten Parallelepipeds an; ferner ist

$$\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 22, S. 26)}$$

$$V\mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 23, S. 27)}$$

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot V\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{D} \quad \text{(Gl. 25, S. 27)}$$

γ) Differentialformeln.

Der Hamilton'sche Operator $\nabla = \mathfrak{i}\,\partial/\partial x + \mathfrak{j}\,\partial/\partial y + \mathfrak{k}\,\partial/\partial z$ an einem Scalar ausgeführt, ergibt einen Vector. An einem Vector kann er entweder auf scalare oder auf Vectorart ausgeführt werden; man erhält jenachdem

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \nabla\mathfrak{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 44, S. 42)}$$

$$\operatorname{curl}\mathfrak{A} = V\nabla\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 46, S. 45)}$$

Für die Differentiirung nach einer scalaren Veränderlichen gelten die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) &= \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{A}}{dt} \\ \frac{d}{dt}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} &= \mathrm{V}\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \mathrm{V}\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{B} \end{aligned}\right\} \quad \text{(Gl. 28, S. 33)}$$

$$dA = d\mathfrak{r}\cdot\nabla A \quad \text{(Gl. 36, S. 38)}$$

(dA ist die Aenderung des Scalars A bei einer Verschiebung um $d\mathfrak{r}$); hieraus folgt

$$\frac{dA}{dn} = (\nabla A)_0 \quad \text{(Gl. 37, S. 39)}$$

Operator $(\mathfrak{a}\nabla)$

$$\mathfrak{a}\nabla = a_1\,\partial/\partial x + a_2\,\partial/\partial y + a_3\,\partial/\partial z \quad \text{(Gl. 38, S. 39)}$$

$$(\mathfrak{a}\nabla)A = \mathfrak{a}\cdot\nabla A \quad \text{(Gl. 40, S. 40)}$$

(gilt nur für Scalaren, wie A).

$$(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\cdot(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A} \quad \text{(Gl. 42, S. 40)}$$

$$(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{A} = \nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{a} + \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{a} \quad \text{(Gl. 55, S. 50)}$$

Laplace'scher Operator

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 \quad \text{(Gl. 66, S. 57)}$$

$$\mathrm{div}\cdot\nabla A = \nabla^2 A \quad \text{(Gl. 68, S. 57)}$$

$$\mathrm{curl}\cdot\nabla A = 0 \quad \text{(Gl. 69, S. 57)}$$

$$\nabla^2\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\nabla^2 A_1 + \mathfrak{j}\nabla^2 A_2 + \mathfrak{k}\nabla^2 A_3 \quad \text{(Gl. 70, S. 58)}$$

$$\mathrm{div}\cdot\mathrm{curl}\,\mathfrak{A} = 0 \quad \text{(Gl. 71, S. 58)}$$

$$\mathrm{curl}^2\mathfrak{A} = \nabla\cdot\mathrm{div}\,\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A} \quad \text{(Gl. 72, S. 59)}$$

(In der zweiten Zeile nach Gleichung 72 ist auf Seite 59 ein sinnstörender Druckfehler stehen geblieben, indem a anstatt $\mathfrak{A}$ gesetzt ist)

$$\mathrm{div}\,A\mathfrak{B} = A\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\nabla A \quad \text{(Gl. 78, S. 61)}$$

$$\mathrm{curl}\,A\mathfrak{B} = A\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B} + \mathrm{V}(\nabla A)\cdot\mathfrak{B} \quad \text{(Gl. 80, S. 61)}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B} \quad \text{(Gl. 81, S. 62)}$$

$$\mathrm{curl}\,\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

$$= \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} \quad \text{(Gl. 84, S. 64)}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}\nabla)\,\mathfrak{A} - \nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad . \; . \quad \text{(Gl. 85, S. 64)}$$

$$\mathrm{V}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}) = \mathrm{curl}_{\mathfrak{a}}\,\mathrm{V}\,\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A} - \nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{B} \quad . \; . \quad \text{(Gl 86, S. 64)}$$

δ) Anwendungen auf die Mechanik.

Für Kräfte am Punkte gelten die Gleichungen $\mathfrak{R} = \Sigma\mathfrak{P}$; $\mathfrak{R}\mathfrak{v} = \Sigma\mathfrak{P}\mathfrak{v}$ (S. 15). Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ für irgend einen Punkt eines sich bewegenden starren Körpers ist

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \mathrm{V}\,\mathfrak{u}\mathfrak{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 20, S. 22)}$$

Gleichgewichtsbedingungen für Kräfte $\mathfrak{P}$ am starren Körper:

$$\Sigma\mathfrak{P}\,d\mathfrak{w} = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma\mathrm{V}\,\mathfrak{r}\mathfrak{P} = 0. \quad . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 26, S. 29)}$$

Umkehrung von Gleichung (20):

$$\mathfrak{u} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 49, S. 48)}$$

Zerlegung der Geschwindigkeit $\mathfrak{A}$ einer Flüssigkeit in der Nachbarschaft eines Punktes, von dem die unendlich kleinen Radienvectoren $\mathfrak{a}$ gerechnet sind:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \\ \mathfrak{B} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{V}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{a}) \\ \mathfrak{C} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{V}(\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{a}) + \nabla_{\mathfrak{a}}\mathfrak{A}\mathfrak{a} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad \text{(Gl. 58, S. 53)}$$

Hiervon stellt $\mathfrak{C}$ die Formänderungsbewegung dar, für die $\mathrm{curl}\,\mathfrak{C} = 0$ ist; $\mathrm{curl}\,\mathfrak{A} = \mathrm{curl}\,\mathfrak{B}$ gibt das Doppelte der Winkelgeschwindigkeit der Wirbelbewegung an.

B. Formeln der Potentialtheorie.

Satz von Stokes:

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = \int \mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{N}\,df \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 90, S. 70)}$$

$$\int_{P_0}^{P_0} A\,d\mathfrak{s} = \int \mathrm{V}\,\mathfrak{N}\cdot\nabla A\,df \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 96, S. 72)}$$

Satz von Gauss:

$$\int \mathfrak{E}\mathfrak{N}_a df = 4\pi \int \varrho dv \quad \text{(Gl. 117, S. 93)}$$

$$\int \mathfrak{A}\mathfrak{N}_i df = -\int \operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot dv \quad \text{(Gl. 101, S. 77)}$$

$$\int A\mathfrak{N}_i df = -\int \nabla A \cdot dv \quad \text{(Gl. 102, S. 79)}$$

$$\int V\mathfrak{A}\mathfrak{N}_i df = \int \operatorname{curl} \mathfrak{A} \cdot dv \quad \text{(Gl. 103, S. 80)}$$

Satz von Green:

$$\left.\begin{aligned}\int \nabla U \cdot \nabla V \cdot dv + \int U \cdot \nabla^2 V \cdot dv \\ + \int (U\nabla V)\mathfrak{N}_i df = 0\end{aligned}\right\} \quad \text{(Gl. 120, S. 100)}$$

Gleichung von Laplace:

$$\nabla^2 V = -\varrho \quad \text{oder} \quad \nabla^2 V = -4\pi\varrho.$$

Sie hat die Lösung

$$V = \int \frac{\varrho dv}{4\pi r} \quad \text{bezw.} \quad V = \int \frac{\varrho dv}{r} \quad \text{(Gl. 111, S. 86, 113, S. 88)}$$

Vectorpotential.

Definition:

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{c} dv}{r} \quad \text{(Gl. 176. S. 215)}$$

Laplace'sche Gleichung:

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = -4\pi\mathfrak{c} \quad \text{(Gl. 179, S. 218)}$$

Falls $\operatorname{div} \mathfrak{c} = 0$ ist $\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0$ . . (Gl. 181, S. 221)

$$\operatorname{curl} \mathfrak{A} = -\int \frac{1}{r^3} V \mathfrak{c}\mathfrak{r} dv \quad \text{(Gl. 182, S. 222)}$$

$$\text{pot} \cdot \operatorname{curl} \mathfrak{c} = \operatorname{curl} \cdot \text{pot}\, \mathfrak{c} \quad \text{(Gl. 204, S. 235)}$$

$$\nabla \cdot \text{pot}\, \sigma = \text{pot} \cdot \nabla \sigma \quad \text{(Gl. 207, S. 237)}$$

C. Formeln des zweiten Abschnittes.

Bezeichnungen: $\mathfrak{E}$ elektrische Kraft, $\mathfrak{D}$ elektrische Verschiebung, $\mathfrak{H}$ magnetische Kraft, $\mathfrak{B}$ magnetische Induction,

K inductive Capacität (Dielektricitätsconstante), μ Permeabilität, ϱ_f ϱ_w σ_f σ_w die Raumdichten einer Vertheilung von freien oder wahren elektrischen (ϱ) oder magnetischen (σ) Massen, T Energie, $\mathfrak{i}$ elektrischer Leitungsstrom, $\mathfrak{c}$ wahrer elektrischer Strom, $\mathfrak{g}$ magnetischer Strom, k specifische elektrische Leitungsfähigkeit, F mechanische Kraft.

$$\mathfrak{D} = \frac{K}{4\pi} \cdot \mathfrak{E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 115, S. 91)}$$

$$dT = \tfrac{1}{2} \mathfrak{E} \mathfrak{D} dv = \frac{K}{8\pi} \mathfrak{E}^2 dv = \frac{2\pi}{K} \mathfrak{D}^2 dv \quad \text{(Gl. 116, S. 92)}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = K \varrho_f + \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E} \cdot \nabla K \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 118, S. 96)}$$

$$\varrho_f = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{E}; \quad \varrho_w = \operatorname{div} \mathfrak{D} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 119, S. 98)}$$

$$T = \tfrac{1}{2} \iint \frac{\varrho_w dv}{r} \cdot \varrho_f dv \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 123, S. 103)}$$

Coulomb'sches Gesetz:

$$F = \frac{e'_w \cdot e''_w}{K r^2} = K \frac{e'_f \cdot e''_f}{r^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 127, S. 116)}$$

$$\mathfrak{B} = \mu \cdot \mathfrak{H} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 128, S. 123)}$$

$$dT = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B} \mathfrak{H} dv = \frac{\mu}{8\pi} \mathfrak{H}^2 \cdot dv = \frac{1}{8\pi\mu} \mathfrak{B}^2 dv \quad \text{(Gl. 129, S. 123)}$$

$$\sigma_w = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 130, S. 127)}$$

$$\sigma_f = -\frac{\mathfrak{H} \nabla \mu}{4\pi\mu} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{B} \nabla \frac{1}{\mu} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 134, S. 128)}$$

Inductionsgesetz:

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = 4\pi J \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 141, S. 147)}$$

Erste Hauptgleichung, 1) falls nur Leitungsströme vorkommen:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{i} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 143, S. 151)}$$

2) mit Berücksichtigung der Verschiebungsströme:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi \mathfrak{c} = 4\pi k \mathfrak{E} + K \frac{d\mathfrak{E}}{dt} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 154, S. 159)}$$

3) zugleich mit Berücksichtigung der eingeprägten Kräfte in magnetisch harten Medien und der Convectionsströme:

$$\mathrm{curl}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i)$$

$$= 4\pi\mathfrak{c} = \left(4\pi k + K\frac{d}{dt}\right)\mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{u}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D} \quad \text{(Gl. 174, S. 213)}$$

Ohm'sches Gesetz:

$$\mathfrak{i} = k\mathfrak{E} \quad \text{(Gl. 145, S. 153)}$$

Ioule'sches Gesetz:

$$Q = \mathfrak{E}\mathfrak{i} = k\mathfrak{E}^2 = \frac{K}{8\pi\tau}\mathfrak{E}^2 \quad \text{(Gl. 147, S. 154, Gl. 148 S. 155)}$$

Magnetischer Strom:

$$\mathfrak{g} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \quad \text{(Gl. 158, S. 163)}$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{g} = 0 \quad \text{(Gl. 160, S. 164)}$$

Zweite Hauptgleichung, 1) ohne Berücksichtigung der eingeprägten elektrischen Kräfte:

$$\mathrm{curl}\,\mathfrak{E} = -\mathfrak{g} = -\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = -\mu\frac{d\mathfrak{H}}{dt} \quad \text{(Gl. 163, S. 171)}$$

2) mit deren Berücksichtigung:

$$\mathrm{curl}\,(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e) = -\mathfrak{g} = -\frac{d\mathfrak{B}}{dt} \quad \text{(Gl. 175, S. 214)}$$

Tafel der Dimensionen siehe S. 172, 266 und 273.

D. Formeln des dritten Abschnittes.

Elektrodynamische Kraft:

$$\mathfrak{F} = \mathrm{V}\mathfrak{c}\mathfrak{B} \quad \text{(Gl. 166, S. 180)}$$

Magnetodynamische Kraft:

$$\mathfrak{F}' = -\mathrm{V}\mathfrak{g}\mathfrak{D} \quad \text{(Gl. 170, S. 182)}$$

Im Dielektricum ist

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{F}' = \frac{d}{dt}\mathrm{V}\mathfrak{D}\mathfrak{B} \quad \text{(Gl. 171, S. 182)}$$

Herleitung der magnetischen Kraft aus dem Vectorpotentiale der elektrischen Ströme:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_m + \operatorname{curl}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{B}_m + \mu\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_m + \operatorname{curl}\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}\end{aligned}\right\}\quad \text{(Gl. 191, S. 224)}$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_m - \int \frac{1}{r^3} V \mathfrak{c}\mathfrak{r}\, dv \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 193, S. 227)}$$

Directe Bestimmung von $\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}$ für den allgemeinsten Fall:

$$\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} = \int \frac{\mu \mathfrak{f}\, dv}{r} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 200, S. 231)}$$

wobei $\mathfrak{f} = \mathfrak{c} + \frac{1}{4\pi}\operatorname{curl}\mathfrak{H}_i + \frac{1}{4\pi\mu} V(\nabla\mu)\mathfrak{H}$ (Gl. 199, S. 231)

und $\operatorname{div}\mathfrak{f} = \frac{1}{4\pi}\nabla\frac{1}{\mu}\cdot\operatorname{curl}\mathfrak{B}$ . . . . (Gl. 201, S. 232)

also nicht gleich Null ist.

$$\mathfrak{H}_e = \int \frac{\operatorname{curl}\mathfrak{c}}{r}\, dv = \text{pot.}\operatorname{curl}\mathfrak{c} \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 205, S. 235)}$$

$$\mathfrak{H}_m = -\int \frac{\nabla\sigma_f}{r}\, dv = -\text{pot.}\nabla\sigma_f \; . \; . \quad \text{(Gl. 206, S. 237)}$$

Intensität der Magnetisirung:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{H}\frac{\mu-\mu_0}{4\pi\mu_0} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 208, S. 243)}$$

$$\sigma_f = -\operatorname{div}\mathfrak{J} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 212, S. 243)}$$

Vectorpotential eines Magneten für den Luftraum:

$$\mathfrak{A}_m = \int V\mathfrak{J}\cdot\nabla\frac{1}{r}\cdot dv \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 224, S. 259)}$$

$$\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} = \mu_0 \int V\mathfrak{J}\cdot\nabla\frac{1}{r}\cdot dv \; . \; . \; . \; . \quad \text{(Gl. 225, S. 259)}$$

E. Formeln des vierten Abschnittes.

Bezeichnungen: Coefficient der Selbstinduction L, der gegenseitigen Induction M, Capacität eines Condensators Cap, Widerstand R, Strom C, Energie T, Zeit t.

Ableitung der inducirten elektrischen Kraft bei ruhenden Leitern aus dem Vectorpotentiale:

$$\mathfrak{E}_m = -\frac{d\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}}{dt} = -\mu_0\frac{d\mathfrak{A}}{dt} \qquad \text{(Gl. 227 u. 228, S. 270)}$$

$$L = \mu_0'\int\frac{d\mathfrak{s}\,d\mathfrak{s}'}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 234, S. 273)}$$

Elektromotorische Kraft der Selbstinduction:

$$\int\limits_{P_0}^{P_0}\mathfrak{E}_m d\mathfrak{s} = -L\frac{dC}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 235, S. 274)}$$

Energie eines einfachen Kreisstromes:

$$T = \frac{1}{8\pi}\int\mathfrak{B}\mathfrak{H}\,dv = \frac{1}{8\pi}\int\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}\operatorname{curl}\mathfrak{H}\,dv = \frac{1}{2}\mu_0\int\mathfrak{A}\mathfrak{c}\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 C\int\limits_{P_0}^{P_0}\mathfrak{A}\,d\mathfrak{s} = \frac{1}{2}C^2L \quad . \quad \text{(Gl. 236 bis 240, S. 276)}$$

Zeitconstante eines Kreisstromes $\tau = L/R$.

Anwachsen des Stromes nach Schliessung des Stromkreises:

$$C = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 244, S. 278)}$$

Langsame elektrische Schwingungen in einem einfachen Stromkreise, der einen Condensator enthält,

$$\text{für } R = 0\text{:}\quad C = B\sin\frac{t}{\sqrt{L\,\mathrm{Cap}}} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 254, S. 285)}$$

B ist hier eine Constante und gleich der Maximalintensität von C.

Schwingungsdauer $t_0 = 2\pi\sqrt{L\cdot\mathrm{Cap}}$.

und, falls R nicht vernachlässigt werden kann

$$t_0 = 4\pi L\sqrt{\frac{\mathrm{Cap}}{4L - R^2\,\mathrm{Cap}}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 255, S. 285)}$$

Für ein System aus zwei Kreisströmen:

$$M_{2,1} = M_{1,2} = \mu_0\int\frac{d\mathfrak{s}_1\,d\mathfrak{s}_2}{r} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 258, S. 290)}$$

$$T = \frac{1}{2}C_1^2L_1 + \frac{1}{2}C_2^2L_2 + C_1C_2M_{1,2} \quad \text{(Gl. 259, S. 290)}$$

$$\left.\begin{aligned}\int_{P^0}^{P_0} \mathfrak{E}_m\, d\mathfrak{s}_1 &= -L_1 \frac{d C_1}{dt} - M_{1,2} \frac{d C_2}{dt} \\ &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial C_1}\right)\end{aligned}\right\}\text{(Gl. 260 u. 261, S. 291)}$$

Intensität des Energiestromes im elektromagnetischen Felde:

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{4\pi} V(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_e)(\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_i) + \text{curl}\,\mathfrak{R} \quad \text{(Gl. 267, S. 301)}$$

F. Formeln des fünften Abschnittes.

Bewegter Magnet und ruhender Leiter:

$$\dot{\mathfrak{B}} = -(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{B} + V\mathfrak{u}\mathfrak{B} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 270, S. 316)}$$

$$\{(\mathfrak{v}\nabla) - V\mathfrak{u}\} = \{\nabla\mathfrak{v} - V\mathfrak{v}\,\text{curl}\} \quad \cdot \quad \text{(Gl. 275, S. 318)}$$

Für den solenoidalen Bestandtheil $\mathfrak{E}'_{\mathfrak{v}}$ der inducirten Kraft $\mathfrak{E}_{\mathfrak{v}}$ erhält man

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}'_{\mathfrak{v}} &= -\dot{\mathfrak{A}}_{\text{Maxw.}} \\ &= (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} - V\mathfrak{u}\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 272, S. 317)} \\ &= V\mathfrak{B}\mathfrak{v} + \nabla\mathfrak{A}_{\text{Maxw.}}\mathfrak{v} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 276, S. 318)}\end{aligned}$$

Wenn umgekehrt der Magnet ruht und der Leiter sich bewegt, kehrt sich das Vorzeichen von $\mathfrak{v}$ in dieser Formel um; für einen Stromkreis mit zwei Gleitstellen wird die inducirte elektromotorische Kraft

$$\begin{aligned}E = \int d\mathfrak{s} V\mathfrak{v}\mathfrak{B} &- (\mathfrak{A}^{\text{I}}\mathfrak{v}^{\text{I}}_{a,b} + \Psi^{\text{I}}_{a,b}) \\ &+ (\mathfrak{A}^{\text{II}}\mathfrak{v}^{\text{II}}_{a,b} + \Psi^{\text{II}}_{a,b}) \quad . \quad \text{(Gl. 282, S. 322)}\end{aligned}$$

Auf Grund des Inductionsgesetzes wird hieraus geschlossen

$$\Psi = -\mathfrak{A}\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{E}''_{\mathfrak{v}} = \nabla\mathfrak{A}\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{E}_{\mathfrak{v}} = V\mathfrak{v}\mathfrak{B} \quad \text{(Gl. 283, 284, S. 323)}$$

(Diese Formeln sind indessen einstweilen noch streitig; vergl. Fussnote auf S. 325).

Energiebeziehungen. Ω bedeutet den Inductionsfluss durch eine Drahtschlinge, Ω' den Theil davon, der durch den Strom in der Schlinge selbst bedingt wird.

Ponderomotorische Arbeit für eine unendlich kleine Verschiebung $= C(d\Omega - d\Omega')$ (Gl. 288, S. 332)

Elektromotorische Arbeit der inducirten Kräfte $= -Cd\Omega$ . . . (Gl. 289, S. 334)

Die Summe beider giebt $-Cd\Omega'$ und dies entspricht der Energieänderung des magnetischen Feldes. Bei Formänderungen der Drahtschlinge ist noch zwischen $d\Omega'$ und $d\Omega''$ zu unterscheiden, so dass $d\Omega' - d\Omega''$ den durch die Formänderung in die Schlinge übertretenden Zuwachs von Ω', dagegen $d\Omega''$ den durch Veränderung von C bedingten bedeutet (§ 127).

Vectorpotential magnetischer Ströme:

$$\mathfrak{Z} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{g}}{r}\, dv \quad \text{(Gl. 293, S. 351)}$$

$$\mathfrak{E}_m = \operatorname{curl} \mathfrak{Z}; \quad \mathfrak{E} = \operatorname{curl} \mathfrak{Z} + \mathfrak{E}_s \quad \text{(Gl. 290, S. 350)}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{Z} = 0 \quad \text{(Gl. 292, S. 351)}$$

$$\mathfrak{D}_m = \frac{K}{4\pi} \operatorname{curl} \mathfrak{Z} \quad \text{(Gl. 294, S. 351)}$$

$$T = -\frac{K}{8\pi}\int \mathfrak{Z}\mathfrak{g}\, dv \quad \text{(Gl. 295, S. 352)}$$

$$\mathfrak{H} = K\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} \quad \text{(Gl. 296, S. 354)}$$

Durch Bewegung im elektrostatischen Felde inducirte magnetische Kraft

$$\mathfrak{H} = 4\pi \mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{D} \quad \text{(Gl. 298, S. 355)}$$

G. Formeln des sechsten Abschnittes.

Gleichung von Lagrange:

$$F_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} \quad \text{(Gl. 300, S. 363)}$$

$$T = \tfrac{1}{2} A\dot{y}_1^2 + \tfrac{1}{2} B\dot{y}_2^2 + C\dot{y}_1\dot{y}_2 \quad \text{(Gl. 304, S. 364)}$$

$$Y_1 = \frac{d}{dt}(A\dot{y}_1 + C\dot{y}_2) \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 305, S. 364)}$$

$$\left.\begin{aligned} X_r &= -\frac{\partial T}{\partial x_r} \\ &= -\tfrac{1}{2}\dot{y}_1^2\frac{\partial A}{\partial x_r} - \tfrac{1}{2}\dot{y}_2^2\frac{\partial B}{\partial x_r} - \dot{y}_1\dot{y}_2\frac{\partial C}{\partial x_r} \end{aligned}\right\} \text{(Gl. 306 u. 307, S. 365)}$$

Zwangszustand:

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{N}} = \mathfrak{p}_i \cdot \mathfrak{i}\mathfrak{N} + \mathfrak{p}_j \cdot \mathfrak{j}\mathfrak{N} + \mathfrak{p}_k \cdot \mathfrak{k}\mathfrak{N} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 308, S. 370)}$$

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{p}_i}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{p}_j}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 309, S. 370)}$$

$$\mathfrak{M} = \mathrm{V}\,\mathfrak{i}\mathfrak{p}_i + \mathrm{V}\,\mathfrak{j}\mathfrak{p}_j + \mathrm{V}\,\mathfrak{k}\mathfrak{p}_k \quad \ldots \quad \text{(Gl. 310, S. 371)}$$

$$\mathfrak{p}_i = -\mathfrak{i}\frac{F^2}{8\pi}K;\ \mathfrak{p}_j = \mathfrak{j}\frac{F^2}{8\pi}K;\ \mathfrak{p}_k = \mathfrak{k}\frac{F^2}{8\pi}K \quad \text{(Gl. 314, S. 374)}$$

Diese Formeln geben den Zwangszustand im elektrostatischen Felde an, wenn $\mathfrak{i}$ in der Richtung der elektrostatischen Kraft geht und F den Tensor dieser Kraft bedeutet; ersetzt man F durch H und K durch μ, so erhält man den Zwangszustand im magnetischen Felde (Gleichung 316, S. 376).

$$\mathfrak{M} = \mathrm{V}\,\mathfrak{J}\mathfrak{B} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 317, S. 377)}$$

Elektromagnetische Wellen:

$$\nabla^2\mathfrak{H} = K\mu\frac{d^2\mathfrak{H}}{dt^2},\ \nabla^2\mathfrak{E} = K\mu\frac{d^2\mathfrak{E}}{dt^2} \quad \text{(Gl. 323 u. 324, S. 379)}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}^0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right); \\ \mathfrak{H}^0 &= \mathfrak{j}H_2{}^0 + \mathfrak{k}H_3{}^0 \\ \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}^0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right); \\ \mathfrak{E}^0 &= -\mathfrak{j}\frac{\tau}{\lambda K}H_3{}^0 + \mathfrak{k}\frac{\tau}{\lambda K}H_2{}^0 \end{aligned}\right\} \ldots \quad \text{(Gl. 325 — 330)}$$

$$\lambda = \tau\sqrt{\frac{1}{K\mu}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 326, S. 380)}$$

Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{1}{K\mu}} \quad \ldots\ldots \quad \text{(Gl. 331, S. 384)}$$

Energiestrom:

$$\mathfrak{W} = -\,\mathfrak{i}\,\frac{\tau}{\lambda K}\cdot\frac{1}{4\pi}\sin^2 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{\tau}\right)\cdot\mathfrak{H}_0^{\,2} \quad \text{(Gl. 332, S. 385)}$$

Ebene Wellen in Halbleitern:

$$\nabla^2\mathfrak{H} = 4\pi k\mu\frac{d\mathfrak{H}}{dt} + \mu K\frac{d^2\mathfrak{H}}{dt^2} \quad \ldots \quad \text{(Gl. 333, S. 387)}$$

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^0 e^{\alpha x}\left\{\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{\tau}\right)+\beta\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{\tau}\right)\right\} \quad \text{(Gl. 334, S. 388)}$$

$$\alpha = \frac{2\pi\mu k}{\sqrt{\lambda^2\mu^2k^2+K\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 336, S. 389)}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2\mu^2k^2+K\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Gl. 337, S. 389)}$$